Pratique d'une pédagogie de l'étonnement :

paradoxes mathématiques en classe de seconde

« […] il faut aller du côté où l'on pense le plus […], où la raison aime à être en danger. Si, dans une expérience, on ne joue pas sa raison, cette expérience ne vaut pas la peine d'être tentée. Le risque de la raison doit d'ailleurs être total. […] Tout ou rien. Si l'expérience réussit, je sais qu'elle changera de fond en comble mon esprit. Que ferais-je en effet d'une expérience de plus qui viendrait me confirmer ce que je sais et, pas conséquent, ce que je suis. Toute découverte réelle détermine une méthode nouvelle, elle doit ruiner une pensée. Autrement dit, dans le règne de la pensée l'imprudence est une méthode. »

Gaston Bachelard, *L'engagement rationaliste*, 1972

I. Introduction

C'est le plus souvent à l'école puis au collège que les élèves côtoient les mathématiques. Cette fréquentation, obligatoire pour tous, ne semble pas véritablement désirée pour beaucoup d'entre eux. C'est ainsi, qu'arrivés au lycée, les élèves se sont déjà forgés une image personnelle bien développée, parfois négative, de la discipline qu'il peut s'avérer difficile de faire évoluer. Amer et préoccupant constat d'observer que les pratiques de classe engendrent trop souvent beaucoup de désintérêt et d'ennui pour les élèves. Au mieux obtient-on une motivation extrinsèque d'une partie d'entre eux soucieux de leurs notes et de leur orientation mais qui travaillent cette matière sans réel plaisir. Peut-on s'en étonner lorsque les cours de mathématiques suivent des chemins proprement balisés, débarrassés de tout obstacle, sans surprise, où l'élève ne peut s'égarer s'il comprend et suit les indications ? Au collège, la maîtrise de gestes mécaniques suffit la plupart du temps pour réussir en mathématiques même si la compréhension profonde des notions fait défaut. Aussi peut-on être tenté de faire l'impasse sur le sens, mais ne sacrifie-t-on pas en ce cas, du même coup, le seul véritable moteur de l'apprentissage en mathématiques, le plaisir du sens ? Se pose alors plutôt la question de savoir comment insuffler une *envie de mathématiques* à des élèves qui n'en ont peut-être jamais eu le goût.

Outre l'absolue beauté des mathématiques, on peut penser que c'est fondamentalement leur faculté illimitée à nous étonner, à sans cesse nous faire repousser les limites du monde intelligible qui engendre une fascination. Les mathématiques ne nous séduiraient-elles pas d'autant plus lorsqu'elles perturbent nos pensées, nous surprennent et nous font découvrir des mondes inconnus ? Dès lors, suffirait-il que notre enseignement distille un peu de cet émerveillement, de cet étonnement que peuvent procurer certaines notions mathématiques, pour faire naître chez les élèves une attirance intellectuelle pour cette discipline ?

Des Pythagoriciens avec la découverte des irrationnels, aux algébristes italiens à la Renaissance avec celle des nombres négatifs et des complexes, puis aux travaux de Georg Cantor au début du XX^{e} siècle, les mathématiques se sont souvent développées à partir de notions nouvelles considérées comme des « monstres » à l'époque de leur découverte, tellement elles défiaient le sens commun mathématique. En provoquant de fécondes remises en question, elles ont fait progresser considérablement la discipline. Parmi ces beaux « monstres » figurent des paradoxes qui ont obligé les mathématiciens à inventer de nouveaux concepts et en abandonner d'autres devenus caducs. Ces paradoxes, éléments fondamentaux des constructions mathématiques, pourraient également avoir un intérêt dans les apprentissages, comme stimulateurs de la réflexion des élèves. Nous nourrissons ainsi l'audacieux dessein d'utiliser des paradoxes en classe afin de réveiller les élèves de leur « sommeil dogmatique » selon l'expression de Kant, avec l'espoir qu'ils pourront éprouver quelque étonnement, reconquérir le goût de l'enfance pour l'insolite et la nouveauté, et acquérir une envie indéfectible d'exploration et d'aventure intellectuelles.

II. Pédagogie de l’étonnement

On peut définir l’étonnement comme un sentiment, accompagnant des activités intellectuelles, qui déclenche une activité dans une voie de recherche cognitive lorsque l’intellect est face à un objet qui semble étrange ou insolite. L’étonnement se produit, selon Descartes (dans *Traité des passions*) « *lorsque la première rencontre de quelque objet nous surprend, et que nous le jugeons être nouveau, ou fort différent de ce que nous connaissions auparavant, ou bien de ce que nous supposions qu’il devait être* ».
Platon, dans son dialogue entre Théétète et Socrate, décrit l’étonnement comme un moment de vertige mental : il est l’aboutissement d’une action d’éveil intellectuel nécessaire pour acquérir un véritable savoir. Aristote considère aussi que l’étonnement est à l’origine du savoir mais il ajoute qu’« *apercevoir une difficulté et s'étonner, c'est reconnaître sa propre ignorance* ». Ainsi l’étonnement survient lorsqu’on est intrigué de ne pas comprendre, lorsque qu’une chose familière nous apparaît sous un angle que l’on ne connaissait pas. De plus, l’étonnement semble un sentiment universellement partagé : il n’est pas acquis par une éducation mais semble être naturelle chez tous les humains. Ce profond déséquilibre de la pensée qu’est l’étonnement est nécessaire au développement de la pensée et induit un questionnement. Il traduit la mise en échec de notre appréhension du monde et la prise de conscience d’une défaillance de notre mode de pensée, induisant le besoin irrépressible d’y remédier. Dans l’étonnement, « *la conscience fait l’apprentissage d’elle-même et prend une juste mesure de sa situation et de sa valeur* », note Louis Legrand dans son livre *Pour une pédagogie de l’étonnement*. L’étonnement semble un passage obligé pour l’établissement d’un savoir, entraînant une remise en cause de la pensée. Si son rôle dans les processus d’apprentissage semble essentiel, il convient maintenant de s’interroger sur comment faire naître l’étonnement en classe de mathématiques.

La structuration des ressources mentales des élèves est couramment décrite par un modèle piagétien caractérisé par des processus d’assimilation, d’accommodation et d’équilibration. Quand un élève est mis dans une situation où il découvre un conflit entre ses conceptions anciennes et des éléments nouveaux, l’étonnement survient. Confronter les élèves à un conflit cognitif, expérience dans laquelle les élèves vont réaliser que leurs conceptions sont insuffisantes et qu’ils doivent les réviser, les accommoder, est le moyen le plus sûr de les inviter à mettre en doute leurs certitudes et de faire évoluer durablement et en profondeur leurs connaissances. Ce raisonnement s’appuie sur la théorie de la dissonance cognitive (Festinger, 1957) qui repose sur l’hypothèse que le conflit cognitif provoque un malaise psychique chez l’individu qui s’efforce de le réduire pour maintenir la plus grande consonance possible dans son modèle mental. « Pour *apprendre, il faut être perturbé dans ses certitudes* » constate Alain Giordan et il faut transformer ses structures mentales. À l’étonnement primitif succèdent la dissonance cognitive puis le processus complexe et souvent désagréable de restructuration des conceptions.

Ainsi, l’enseignant se doit d’être à la recherche de déséquilibres intellectuellement constructifs pour provoquer l’étonnement, amorce du besoin de comprendre et d’expliquer pour résoudre le conflit cognitif.
L’analyse des attitudes d’étonnement chez l’enfant a montré que l’étrangeté familière est plus déroutante que la nouveauté pure. Généralisant cette remarque à notre problème, il conviendrait donc de mettre les élèves dans des situations qui leur paraissent habituelles mais qui vont fortement les dérouter, plutôt que de les surprendre par de la nouveauté. En ce sens, les problèmes paradoxaux qui abondent en mathématiques apparaissent bien adaptés : ils partent en général de faits évidents pour l’élève et aboutissent à des conclusions absurdes. De là naît immanquablement l’étonnement, le questionnement, le doute, la remise en question.

Le paradoxe peut se définir, en utilisant une acception assez large, par une proposition qui semble contenir une contradiction, ou par un raisonnement apparemment sans faille qui aboutit à une conclusion absurde, ou encore, plus généralement, par une situation contre-intuitive. La puissance des paradoxes, à l’origine d’immenses progrès dans l’histoire des sciences, est qu’elle nous révèle les faiblesses de notre raison, nos propres insuffisances ou celles de nos concepts. C’est pourquoi ils sont aussi un outil indispensable pour l’enseignement. Provoquant l’étonnement, ils ont un effet motivant immédiat pour les élèves qui sont mal à l’aise, confrontés au conflit cognitif qu’induisent les paradoxes. La raison, face à une contradiction flagrante, est déstabilisée, bouleversée, en crise. Elle ne peut que chercher à trouver un nouveau modèle explicatif pour

concilier les données conflictuelles qui se présentent à elles. Devant un paradoxe, il n'y a pas d'autre échappatoire que la résolution du conflit : l'obstacle cognitif ne peut être contourné, il doit être franchi.
Nous proposons de confronter des élèves à des paradoxes en mathématiques et d'étudier l'incidence de ces problèmes sur la classe. Nous formulons l'hypothèse que les paradoxes ont un intérêt pédagogique en mathématiques au lycée.

III. Méthodologie et expérimentations

III.1. Variables et dimensions

L'expérimentation consiste à proposer quelques paradoxes mathématiques à résoudre dans une classe de seconde et observer les effets que ces problèmes occasionnent sur les élèves et dont on pourra déduire un éventuel intérêt pédagogique. Dans cette étude, la variable dépendante, dont on veut observer l'effet, est l'activité de problèmes paradoxaux. La variable indépendante, sur laquelle on veut observer l'effet de la variable dépendante, est l'intérêt pédagogique que l'on peut retirer des problèmes étonnants.
Les dimensions du concept « intérêt pédagogique » que l'on va tenter de cerner dans cette étude sont a priori variées : intérêt pour les apprentissages, intérêt psychologique et affectif, intérêt cognitif, intérêt méthodologique, intérêt métacognitif etc.

III.2. Choix de techniques de recueil de données

Le protocole de recherche est basé sur un recueil de données écrites que sont les productions des élèves pour chaque problème, sur une enquête par questionnaire fermé effectuée à la fin de l'expérimentation et enfin des observations en situation lors des phases de mise en commun et de résolution collective des paradoxes.

III.3. Population soumise à l'expérimentation

La population, soumise à l'expérimentation durant quelques semaines en 2007, se compose de 30 élèves d'une classe de seconde du lycée polyvalent de Trois-Bassins. Ces élèves suivent tous l'option Initiation aux Sciences de l'Ingénieur, dans l'optique d'intégrer une classe de première scientifique S ou de première technologique STI. Ils ont a priori tous le projet de poursuivre des études à dominante scientifique et technique et sont supposés être de ce fait intéressés par les mathématiques. Néanmoins nous constatons une attitude générale envers les mathématiques quelque peu surprenante : les élèves ne se posent jamais de questions, « avalent » des mathématiques sans broncher, semblent totalement passifs, ne prennent jamais aucune initiative et sont totalement désemparés s'il faut leur chercher une réponse par eux-mêmes. Tellement guidés au collège sur des exercices mécaniques d'application, ils sont paralysés lorsqu'ils se trouvent seuls devant une question qu'ils n'ont jamais traitée précédemment. Pour autant, ils donnent l'impression que tout semble aller de soi pour eux, l'évidence est érigée en méthode; cela évite les questionnements et la découverte des abîmes du non-sens. Enfin, pour survivre dans le flot mathématique, ils composent avec quelques règles mal mémorisées dont ils n'ont aucune idée de comment les justifier. Vision apocalyptique d'une classe d' « automathes » !

III.4. Protocole de recherche

L'expérimentation a consisté à faire réfléchir les élèves à des paradoxes dans le cadre d'exercices à chercher hors temps scolaire et à rendre à l'enseignante à la séance suivante. Pour chaque problème, des questions sont posées afin d'orienter (le moins possible) leur réflexion et il leur est demandé de noter aussi toutes les réactions que les problèmes leur ont inspirées. À ces productions s'ajoute un long questionnaire (cf. Annexe 9) qui a été distribué aux élèves à l'issue de l'expérimentation afin de mieux cerner l'image qu'ils se sont fait de ces problèmes. L'analyse détaillée des résultats de ce questionnaire n'est pas présentée dans ce document.

III.5. Choix des paradoxes

Les paradoxes ont été choisis pour couvrir un large choix de cadres : algébrique, géométrique, arithmétique, logique et numérique. Une difficulté fut de trouver des paradoxes qui recèlent à la fois une contradiction évidente et des notions mathématiques sous-jacentes compatibles avec les connaissances d'un élève de seconde. Les problèmes choisis ont été tirés de diverses sources, et parfois adaptés: livres spécialisés sur les paradoxes, sites Internet recensant des problèmes amusants, articles de revue spécialisée sur l'éducation, manuels d'enseignement etc.
La partie suivante détaille les problèmes qui ont été expérimentés ainsi qu'une analyse préliminaire succincte des productions d'élèves.

IV. Analyse des observations

IV.1. *Problème des 30 euros*

IV.1.1. Énoncé du problème, consigne et objectif

L'énoncé du problème des 30 euros est le suivant :
« Trois jeunes gens prennent un café sur une terrasse ensoleillée. Ils doivent payer 30 euros et donnent chacun un billet de 10 euros. La patronne, charmante, leur fait une réduction de 5 euros. Le serveur prend donc 5 pièces de 1 euro, ne pouvant les partager en trois, il décide subrepticement de glisser 2 euros dans sa poche et donne généreusement une pièce de 1 euro à chacun des trois jeunes gens. Finalement chacun a payé $(10-1)$ euros, donc 9 euros. En ajoutant les 2 euros du serveur, on obtient $((9\times3)+2)$ euros, soit 29 euros. Mais nous avions 30 euros ! *Où est donc passé le dernier euro ?* »
Il a été demandé aux élèves d'utiliser la feuille d'énoncé comme une feuille de brouillon, et d'écrire au stylo tous les calculs, schémas et idées qu'ils souhaitaient pour tenter de résoudre ce problème, sans rien effacer ni rien barrer sur la feuille. L'exercice a été donné comme travail personnel à chercher en temps libre et à rendre à la séance suivante.
L'objectif de cette activité est de confronter les élèves à un problème concret apparemment simple et d'observer, à travers leurs productions écrites, comment les élèves utilisent un brouillon, quelles formes prennent leur recherche, quel cheminement ils suivent, quels outils et méthodes ils mettent en œuvre pour résoudre le problème et à quelle conclusion ils arrivent.

IV.1.2. Analyse des productions des élèves

La consigne a dérouté toute la classe : ils n'ont jamais eu à rendre un brouillon de recherche à un professeur. Aussi a-t-il été difficile pour certains élèves de se résoudre à appliquer la consigne : ils ont rendu des productions bien écrites, avec des phrases, sans rature, voire des argumentations organisées en paragraphes : elles ne sont sans doute pas le vrai brouillon de l'élève. Pour s'assurer de recueillir un véritable brouillon de recherche, il aurait fallu réaliser l'expérience en classe. Nous avons néanmoins choisi de proposer la résolution hors temps scolaire car il nous semble que l'élève se sent certainement plus libre pour réfléchir en dehors de la classe et peut y consacrer le temps qu'il souhaite.
Les procédures et outils utilisés recueillis dans les productions sont très diverses. On peut relever, sans faire un inventaire exhaustif (cf. Annexe 1)

- des calculs sur des nombres qui « répètent » l'énoncé et qui n'aboutissent pas à la résolution du paradoxe apparent posé par le problème,
- des calculs sur des nombres de l'énoncé qui n'ont pas de signification directe avec l'énoncé,
- des résolutions d'équation,
- des réécritures de l'énoncé en le disséquant et en le rephrasant,
- des essais pour retrouver 30 euros en écrivant des relations entre les nombres de l'énoncé,
- des représentations graphiques de l'énoncé qui résolvent ou non le problème.

Le caractère concret du problème qui décrit une situation que chaque élève peut se représenter sans difficulté, couplé à un calcul trivial $9\times3+2=29$ qui semble refléter exactement l'action décrite dans l'énoncé, provoque un conflit cognitif fort chez tout élève confronté à la conclusion de l'euro manquant dont la disparition ne s'explique pas de façon intuitive par les faits exposés. Après avoir cherché une explication, quand l'élève n'a pas trouvé de solution mathématiquement satisfaisante, il fait parfois preuve de lucidité et se résout à écrire :

Pour résoudre le conflit interne qui les met mal à l'aise, certains élèves cherchent à tout prix une solution par les mathématiques et en viennent à invoquer les nombres rationnels (les tiers d'euro), ou les arrondis pour faire apparaître « mathémagiquement » un euro dans cette situation bien concrète. Quand aucune solution algébrique n'est trouvée par l'élève, celui-ci « évacue » le conflit provoqué par le problème en imaginant où

est passé le dernier euro : « il a peut-être été gardé par l'une des personnes », « le dernier euro est partagé en trois », « il l'a glissé dans sa poche », « le dernier euro était donc avec les trois jeunes », « le dernier euro qui reste est dans la caisse, il y avait donc de l'argent en trop », « un des trois jeunes a gardé un euro dans sa poche », « le dernier euro qui reste à la fin a été déduit au départ », « le dernier euro est resté dans la caisse, la patronne bénéficie de un euro, elle est donc avantagée » ! Ces réponses montrent que l'élève a renoncé à toute explication logique basée sur les mathématiques quand son raisonnement ne lui permet pas de mettre en accord sa représentation mentale du problème concret avec le calcul algébrique fallacieux de l'énoncé.
Les élèves ont été très demandeurs de la solution de ce problème. Certains ayant trouvé une explication ont exposé à la classe leur résolution de l'apparent paradoxe. Les différentes explications ont achevé de convaincre les plus rétifs des élèves et ont soulagé la classe qui a conclu qu'il fallait simplement ne pas se laisser abuser par une lecture trop rapide de l'énoncé et qu'un raisonnement mathématiquement exact permettait de donner une explication rationnelle à ce problème.

IV.2. Puzzle de Lewis Carroll

IV.2.1. Énoncé du problème, consigne et objectif

L'énoncé est le suivant : « Découper les quatre pièces qui forment le carré ci-dessous et les réarranger pour former un puzzle rectangulaire puis coller les pièces. Comparer l'aire du carré de départ de côté 8 unités avec l'aire du rectangle obtenu. Comment expliquer ce résultat ? ».

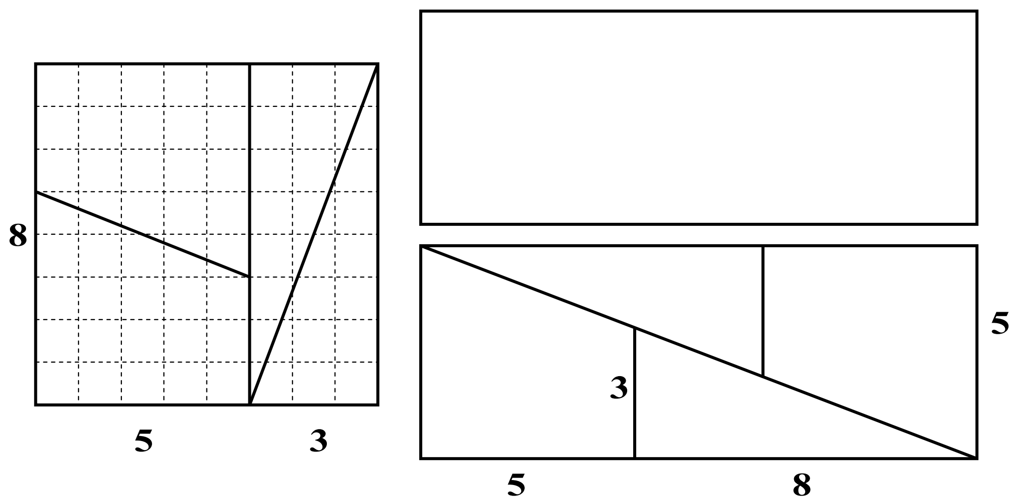


Figure 1

Il est aussi demandé aux élèves ce qu'ils pensent de cet exercice et quelles réactions il suscite en eux. L'objectif assigné à cet exercice est de confronter les élèves à un problème étonnant (un puzzle constitué des mêmes pièces mais dont l'aire varie !), inventé par Lewis Carroll, et qui doit provoquer un conflit cognitif chez l'élève entre sa perception visuelle et ses connaissances sur les aires. Il est attendu une ébauche de raisonnement qui conclut que les pièces ne couvrent pas entièrement la surface du rectangle, voire une démonstration mathématique de ce fait, réalisable avec les outils dont dispose un élève de seconde.

IV.2.2. Analyse des productions des élèves

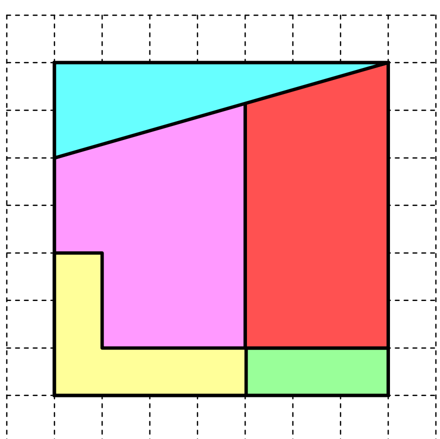
Ce puzzle a provoqué des réactions qui nous ont fortement étonnée. Quelques élèves n'ont pas vu où était le problème : ils ont bien calculé les aires du carré et du rectangle, ils ont assemblé le puzzle mais n'ont pas réalisé que l'aire doit se conserver si on utilise les mêmes pièces dans les deux puzzles. Cet exercice a même été traité avec un certain mépris de la part d'élèves qui n'ont pas vu le paradoxe et qui ont estimé que l'exercice était facile, sans intérêt et peu digne de leur niveau de lycéen.
A contrario, les élèves qui ont remarqué le paradoxe qualifient ce problème d'étrange, de bizarre, de surprenant, d'étonnant ; ils jugent que le résultat est « inexplicable car impossible », ou que l'énoncé est vrai et faux à la fois, que le problème est difficile. Certains élèves doutent de leurs capacités considérant qu'ils n'ont pas le niveau requis ou les moyens nécessaires pour résoudre le problème. Ils disent avoir ressenti de

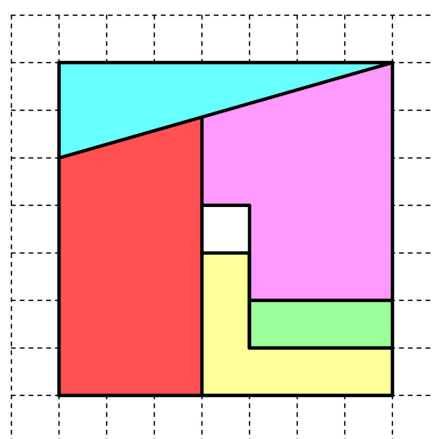
l'agacement, de l'énervement, de l'inquiétude ou de l'ennui en essayant de trouver une explication à la situation paradoxale décelée.
Les productions des élèves révèlent que ce problème semble avoir profondément déstabilisé les élèves dans des connaissances que l'on pourrait supposer bien assimilées à l'entrée au lycée. En effet, les explications données par les élèves pour expliquer la différence d'aire révèlent des sortes de théorèmes-élèves pour le moins déconcertants : « puisqu'on n'utilise pas la même formule pour calculer l'aire du carré et l'aire du rectangle, il est normal qu'on ne trouve pas le même résultat », « la différence d'aire est due aux calculs différents », « quand on change la disposition des pièces, l'aire change », « l'aire n'est pas la même dans les deux figures car il n'y a pas la même disposition des lignes et carreaux de la figure ». La déstabilisation produite par la puissance de ce paradoxe peut même être si forte qu'elle a conduit des élèves à devenir temporairement non-conservant pour les aires et à se convaincre qu'on peut changer l'aire du puzzle en modifiant la disposition des pièces ! Seul un élève évoque la possibilité qu'il y ait du blanc entre les pièces quand il les a collées sur le rectangle mais ensuite se rétracte quand il a mieux recollé les pièces et écrit finalement ne pas trouver d'explication au problème.
Les élèves n'ayant pas construit d'ébauche de raisonnement par eux-mêmes, nous avons guidé les élèves dans l'analyse du problème en classe en suivant une démarche pédagogique basée sur un questionnement à la manière de Platon lorsqu'il amena l'esclave Ménon à trouver seul la solution du problème de la duplication du carré. Après les premières déductions de base faites, l'utilisation de l'outil vecteur a été suggérée par les élèves eux-mêmes pour démontrer que les sommets des pièces visuellement situés sur une diagonale du rectangle ne sont en réalité pas alignés. Le fait que les élèves aient réussi par eux-mêmes, par le truchement de nos questions, à trouver une explication mathématique satisfaisante au paradoxe les a impressionnés. Après avoir été ébranlés quelque peu dans certaines de leurs représentations mathématiques, ils ont malgré tout renforcé leur confiance en les mathématiques comme outil privilégié de compréhension rationnelle du monde.

IV.3. Problème du petit carré blanc

IV.3.1. Énoncé et objectif

L'énoncé de ce problème est le suivant : « Voici deux puzzles carrés de 7 unités de côté. Ils ont la même aire, pourtant en disposant les pièces différemment dans le puzzle n°2, un petit carré blanc apparaît au centre. Comment expliquer ce résultat ? »
A la suite de ce problème, il est demandé aux élèves leurs réactions.





Figures 2 et 3

L'objectif est identique à l'exercice précédent.

IV.3.2. Analyse des productions des élèves

La plupart des élèves ont remarqué que les pièces sont les mêmes dans les deux puzzles (en apparence seulement) et ont trouvé vraiment étrange qu'en réorganisant les pièces à l'intérieur du carré, on puisse faire apparaître un petit carré blanc. Les élèves ont déclaré avoir envie de résoudre cette énigme même s'ils pensent le plus souvent que le problème est difficile. Certains élèves remettent en cause leurs capacités et avouent humblement réaliser, après avoir été confrontés à ce type de problèmes, que finalement ils sont loin de tout savoir. D'autres moins confiants ne cherchent pas de solution car ils sont persuadés qu'ils ne la trouveront pas. Cependant, ils disent vouloir avidement la connaître. Les réactions des élèves sont diverses et se partagent entre envie de résoudre le problème, étonnement, amusement, perplexité, curiosité, fascination, plaisir à trouver, soulagement quand ils pensent avoir trouvé une explication, mais aussi insatisfaction de ne pas trouver, inquiétude, agacement, nervosité, incompréhension, doute, sensation d'ignorance, voire de la haine et de la peur.
Ce problème a bien provoqué un conflit cognitif chez les élèves et pour la majorité d'entre eux, son caractère amusant les a incités à chercher une explication. Par contre, aucun raisonnement mathématique n'a été mis en œuvre pour avancer dans sa résolution. Comme dans l'exercice précédent, les élèves ont été amenés, par une sorte de maïeutique reposant sur les questions que nous leur avons soumises, à déduire que l'illusion visuelle provient sûrement de longueurs différentes dans le sens vertical des pièces de couleur verte et rose entre les deux puzzles. L'application du théorème de Thalès dans la figure a permis de montrer qu'effectivement certaines dimensions des pièces verte et rose sont différentes dans les deux puzzles et que ce fait élucide la provenance du carré blanc au centre du puzzle n° 2. Les élèves ont déclaré être très satisfaits et soulagés de constater qu'une fois de plus, les mathématiques permettent d'expliquer logiquement des problèmes qui défient la raison.

IV.4. Problème du quatre qui est égal à cinq

IV.4.1. Énoncé

L'énoncé est adapté d'un problème proposé par Movshovitz-Hadar et Webb dans « One equals zero » (1998).

« Lire attentivement la démonstration qui suit (la double flèche $\Rightarrow$ signifie *implique que*) :

$$16-36=25-45$$
$$\Rightarrow 16-36+\frac{81}{4}=25-45+\frac{81}{4}$$
$$\Rightarrow 4^2-2\times 4\times\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2=5^2-2\times 5\times\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2.$$

En utilisant l'identité remarquable $(a-b)^2=a^2-2\times a\times b+b^2$, on en déduit que :

$$\Rightarrow\left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow 4-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2}$$
$$\Rightarrow 4=5.$$

Le raisonnement exposé ci-dessus commence avec une affirmation qui est vraie ($16-36$ et $25-45$ sont tous deux égaux à -20), mais on aboutit à une conclusion évidemment fausse ($4=5$) ! Comment expliquer ce résultat ? »

Les réactions des élèves sont également recueillies dans cette activité.
L'objectif est de faire réfléchir les élèves sur une démonstration fausse pour qu'ils trouvent l'étape incorrecte dans le raisonnement. Ils sont mis en face d'une contradiction indéniable mais ont beaucoup de difficulté à trouver d'où peut bien provenir l'erreur tellement la démonstration semble incontestablement correcte. Cet exercice « provoquant », une fois résolu, peut marquer durablement la mémoire d'un élève pour l'empêcher de commettre l'erreur fréquente « $a^2=b^2\Rightarrow a=b$ ».

IV.4.2. Analyse des productions des élèves

Ce problème algébrique de niveau collège a mis les élèves en grande difficulté : ils ont été incapables dans un premier temps de trouver l'erreur dans le raisonnement. Les élèves n'ont pas été en mesure de réfuter la démonstration qui engendre une conclusion évidemment fausse, ce qui les a plongés dans un grave état de dissonance cognitive. Le conflit cognitif entre leur certitude sur les nombres (quatre n'est pas égal à cinq) et leur conviction que les calculs présentés sont exacts a provoqué de vives réactions. Les élèves se sont dits très perturbés, perplexes, énervés, perdus, confus, épouvantés par ces calculs qui aboutissent à un résultat impossible, dépassés par les évènements, frustrés, sans voix. Certains concluent de façon extrême qu'on ne peut donc plus faire confiance à l'algèbre et que les mathématiques ne sont pas toujours exactes. Un élève généralise même la conclusion à d'autres nombres (on pourrait donc démontrer similairement que 6 = 7 et 7 = 8 et que tous les nombres entiers seraient égaux !). L'hypothèse la plus souvent avancée par les élèves pour expliquer le problème est que l'on a vraisemblablement mal utilisé l'identité remarquable. La factorisation est en effet le point le plus difficile de la démonstration pour les élèves qui n'ont pas été tous capables de suivre réellement les calculs exposés dans l'énoncé. Ils localisent donc l'erreur de calcul probable sur l'étape de la démonstration qu'ils maîtrisent le moins bien. Cependant, aucune justification n'est donnée concernant l'utilisation incorrecte de l'identité remarquable. Cet exercice, fortement déstabilisant, a donné lieu à la formulation d'un théorème-élève prodigieux : *« Les identités remarquables ne s'appliquent pas aux expressions ne comportant que des chiffres (sauf $\pi, \sqrt{\ldots}, \ldots$)* ». Force est de constater que les paradoxes provoquent vraiment des effets inattendus sur les conceptions mathématiques des élèves telles qu'on peut les analyser dans les productions recueillies dans cette expérimentation (cf. Annexe 3).

Quelques élèves se sont aperçus, en effectuant les opérations dans les parenthèses au carré, que l'on trouvait $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Néanmoins, cela ne les a pas aidés à conclure et à comprendre d'où vient le résultat faux $4 = 5$. Lors de la phase de mise en commun des idées en classe, la recherche d'exemples simples où l'on a deux nombres différents donc les carrés sont égaux s'est avérée être une question très ardue pour toute la classe : personne n'a pensé à deux nombres opposés. La donnée d'un exemple (2 et -2 ont le même carré et pourtant ne sont pas deux nombres égaux) a provoqué une réaction générale de la classe de choc intellectuel devant une réponse si évidente. Ensuite, l'utilisation de cet exemple dans le problème posé a permis aux élèves d'en déduire où se trouvait l'erreur de raisonnement dans les calculs exposés et de résoudre le paradoxe.

IV.5. Le problème du triangle quelconque qui se voulait isocèle

IV.5.1. Énoncé et objectif

L'énoncé est le suivant :

Observer la figure ci-contre :

Le triangle ABC est quelconque : les longueurs de ses trois côtés sont donc différentes.

Ci-dessous se trouve une démonstration que **tout triangle quelconque est forcément isocèle** : un triangle quelconque a donc deux côtés de même longueur !

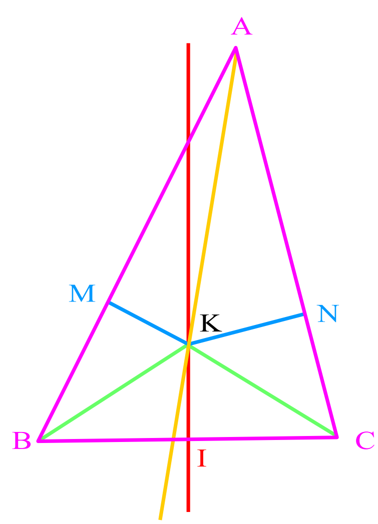


Figure 4

N°	Affirmation	Vrai	Faux
P0	Soit la bissectrice issue de A , et la médiatrice du segment [BC] (droites tracées sur la figure). Elles se coupent au point K.	✓	
P1	Soit M le projeté orthogonal de K sur [AB]. Alors AMK est un triangle rectangle en M.		
P2	Soit N le projeté orthogonal de K sur [AC]. Alors ANK est un triangle rectangle en N.		
P3	K est sur la bissectrice issue de A et les propriétés de la bissectrice assurent que $KM = KN$.		
P4	Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle AMK rectangle en M (***P1***): on a $AK^2 = MK^2 + AM^2$.		
P5	Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle ANK rectangle en N (***P2***): on a $AK^2 = NK^2 + AN^2$.		
P6	Comme $MK = KN$ (*P3*), des deux égalités précédentes, on déduit que $AM^2 = AN^2$, puis $AM = AN$.		
P7	Par construction de K, on sait que K est sur la médiatrice de [BC] (***P0***). Donc les propriétés de la médiatrice assurent que $KB = KC$.		
P8	Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle KBM rectangle en M. On a $KB^2 = KM^2 + MB^2$.		
P9	Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle KCN rectangle en N. On a $KC^2 = KN^2 + NC^2$		
P10	Or, on sait que $KB = KC$ (***P7***) et que KM=KN (***P3***). Donc de ***P8*** et ***P9***, on déduit que $MB^2 = NC^2$, puis $MB = NC$.		
P11	De ***P6***, on a $AM = AN$ et de ***P10***, on a $MB = NC$. Or $AB = AM + MB$ donc $AB = AN + NC = AC$. D'où $AB = AC$ et le triangle ABC quelconque est isocèle en A !		

Il est demandé aux élèves de dire s'ils sont d'accord avec chacune des étapes de la démonstration et, s'ils ne le sont pas, de justifier leur avis, puis d'essayer de résoudre le problème. Enfin ils sont interrogés sur les réactions qu'ils ont eues face à cet exercice.
Cet exercice met l'élève face à une démonstration qui paraît irréfutable si l'on accepte les hypothèses données dans l'énoncé. Il doit donc rechercher une autre explication possible que l'habituelle erreur de raisonnement dans une démonstration : l'erreur se situe ailleurs. Dans le cas présent, elle réside dans la figure qui est fausse. En effet, les projetés orthogonaux M et N ne peuvent être tous les deux sur les côtés-segments du triangle. Il est attendu qu'au cours de sa recherche, l'élève sera tenté de refaire une figure par lui-même pour mieux comprendre et ainsi s'apercevoir que sa figure ne concorde pas avec celle donnée dans l'énoncé. Les élèves sont sensés ressentir un conflit causé par une démonstration qui leur paraît sans faille mais qui aboutit à une conclusion absurde.

IV.5.2. Analyse des productions des élèves

La première question posée aux élèves est « Que pensez-vous a priori d'une démonstration qui prouve qu'un triangle quelconque est forcément isocèle ? ». Plus d'un tiers des élèves ne pensent pas qu'une telle démonstration est nécessairement incorrecte et ne réalisent donc pas que l'affirmation « tout triangle quelconque est isocèle » est fausse et qu'un simple contre-exemple de triangle dessiné suffit pour s'en convaincre ! On peut alors se demander ce qu'ils ont compris de l'énoncé de la question et s'ils ont acquis des rudiments de logique élémentaire pour saisir le sens de la situation proposée. Peut-être aussi n'ont-ils pas vraiment réfléchi au problème, ou qu'une démonstration mathématique n'a pas lien avec le monde «réel » où ils ont pourtant rencontré des triangles quelconques !

Les autres élèves considèrent a priori qu'une telle démonstration est absurde, impossible, fausse mais certains jugent qu'elle serait quand même intéressante et n'excluent donc pas encore tout à fait qu'elle soit nécessairement erronée.
L'énoncé, tel que nous l'avons proposé, ne m'a pas permis de vérifier effectivement si les élèves ont lu la démonstration avec un véritable esprit critique. Il est très vraisemblable que beaucoup d'élèves ont coché « vrai » sur toutes les lignes sans réfléchir. Il aurait été plus judicieux de proposer une démonstration à trous où ils auraient eu à compléter des parties de la démonstration en fournissant, par exemple, les propriétés utilisées et les propositions intermédiaires qui sont réutilisées au fil de la démonstration. Beaucoup d'élèves ne se sont posés aucune question après avoir vérifié la démonstration et considèrent avoir fait l'exercice : le paradoxe de la situation leur a complètement échappé ; pour eux, l'objectif de cette activité n'a pas été atteint.
Par contre, pour une dizaine d'élèves, il est incontestable qu'il existe des triangles quelconques (ils en ont parfois dessiné) mais la démonstration que tout triangle quelconque est isocèle semble aussi relever selon eux d'une logique imparable car ils n'y ont trouvé aucune erreur : difficile alors de réconcilier deux preuves contradictoires ! Cette situation les a beaucoup déstabilisés, au point qu'un élève a déclaré (cf. Annexe 4) : « Comment un triangle de 3, 5 et 2 cm peut-il être isocèle ? De même pour un triangle de 100, 500 et 130 cm, est-il isocèle ? Peut-on démontrer que 500 est égal à 100 ou 130 cm ? N'y a-t-il pas une grande différence entre ses trois mesures ? Si cela continue, on pourra, un jour, démontrer qu'une fourmi est de même longueur qu'un arbre, ou encore qu'elle a une masse aussi importante que l'homme ! ». Cet élève est possiblement dans un état d'esprit comparable à celui de Georg Cantor quand il confiait, dans sa lettre du 29 juin 1877 à Richard Dedekind « *Je le vois mais je ne le crois pas* ! » à propos de sa propre démonstration qu' « *une surface (par exemple un carré, frontière comprise) peut être mis en relation univoque (en bijection) avec une courbe [...], de telle sorte qu'à tout point de la surface corresponde un point de la courbe, et réciproquement [...]* ». L'élève est face à une démonstration dont il juge la conclusion absurde ; de même, Georg Cantor a démontré un résultat qui est était totalement contre-intuitif au XIX^{e} siècle et dont il n'arrivait pas à se convaincre. La seule différence est que la démonstration de Cantor est exacte alors que celle proposée à l'élève est évidemment incorrecte. Malgré l'évidente fausseté de la conclusion, certains élèves, convaincus de la vérité absolue des mathématiques, en ont conclu qu'un triangle quelconque est isocèle, même si, au départ, ils jugeaient cette idée saugrenue et impossible. La démonstration le prouve, donc, pour eux, le résultat démontré est vrai. Un élève s'est même dit soulagé d'avoir pu apprendre qu'un triangle quelconque pouvait être isocèle.
Bien que le problème soit géométrique, de très rares élèves ont refait une figure par eux-mêmes. Le contrat didactique habituel, dans un énoncé de problème de géométrie, est que la construction décrite est toujours possible et qu'une figure, quand elle est fournie dans l'énoncé, concorde exactement avec les données de l'énoncé. La rupture de contrat didactique, qui consiste ici à mettre en doute les hypothèses d'un énoncé et qui est nécessaire pour résoudre le paradoxe, est un obstacle difficilement franchissable pour des élèves « authomatisés » (selon l'expression de Stella Baruk) sortant du collège. Ainsi, même lorsque l'élève a redessiné une figure, son but était de dessiner un triangle quelconque, mais pas de remettre en cause la construction géometrique exposée dans l'énoncé.
Lors de la phase de mise en commun collective, les élèves ont été invités à refaire la construction telle qu'elle est présentée dans l'énoncé. Ils se sont alors aperçus que les projetés M et N avaient des positions différentes que celles données sur la figure de l'énoncé. Ils ont ensuite repris la démonstration en la modifiant au vu de la nouvelle figure. Le paradoxe s'est bien sûr dissipé : un triangle quelconque reste un triangle quelconque. La figure correcte ne permet plus de prouver que deux côtés sont égaux.
De nouveau, ce problème a fait fortement réfléchir une partie des élèves ; ils se sont posé des questions sur ce qui est le vrai et le faux en mathématiques, comment une démonstration peut habilement abuser notre logique et notre intuition d'objets mathématiques longuement fréquentés et devenus familiers mais qui peuvent encore nous étonner. Les élèves ont conclu qu'il fallait faire preuve d'esprit critique face à un énoncé et face à notre propre raisonnement. Cet exercice, tout en étant assez riche du point de vue des connaissances mises en œuvre dans la démonstration, a surtout un intérêt méthodologique : les élèves ont été confrontés au fait qu'en géométrie, à raisonner sur une figure fausse, on peut démontrer des propositions absurdes et qu'il convient de bien vérifier toutes les hypothèses données dans un problème. Finalement, en toutes circonstances mathématiques, douter, s'étonner et s'interroger font figure de vertus cardinales.

IV.6. Le paradoxe statistique de Simpson

IV.6.1. Généralités sur le paradoxe et objectif

Le paradoxe de Simpson, dit aussi paradoxe des statistiques inversées, a été décrit par E. H. Simpson en 1951 (The interpretation of interaction in contingency tables, dans Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B, 13, pp. 238-241). Ce paradoxe est souvent rencontré dans la réalité en particulier dans des statistiques de sciences sociales et médicales. Il qualifie une situation où des résultats contradictoires sont obtenus selon que l'on considère le groupe global ou des sous-groupes des participants à une étude. Des exemples éclairants sont détaillés dans « Le livre des paradoxes » de Nicholas Falletta (1998).

L'expérimentation comporte deux phases : en premier lieu, il est demandé aux élèves ce qu'ils pensent de deux problèmes (cf. fiches-élèves dans Annexe 5) dont les conclusions vont à l'encontre du sens commun; ensuite les élèves analysent des statistiques qui confirment effectivement la conclusion contre-intuitive du premier problème. Leurs réactions face à ce paradoxe statistique sont étudiées. L'objectif de cette activité est d'abord de confronter les élèves à une situation en apparence contre-intuitive où les mathématiques peuvent les aider à se convaincre du bien fondé d'une analyse statistique, même si la conclusion tirée semble en contradiction avec notre intuition première du problème. Plus généralement, le but poursuivi est d'inciter les élèves à considérer tout résultat avec un œil critique et à ne pas tirer de conclusions hâtives d'une étude.

IV.6.2. Analyse des productions des élèves

Le premier problème donné concerne les taux de réussite aux bacs S et L des filles et des garçons d'un lycée fictif où les taux de réussite aux deux bacs sont plus élevés pour les filles que les garçons. Le proviseur en conclut alors que le taux de réussite global au bac (séries S et L confondues) est forcément plus élevé pour les filles que pour les garçons. Les élèves sont amenés à donner leur avis sur la conclusion du proviseur. La grande majorité des élèves la jugent correcte et conforme à leur intuition ; pour eux, la conclusion contraire serait absurde. Cependant, certaines réflexions sont venues parasiter les réponses : des élèves (de sexe masculin) ont objecté, de façon générale, hors du contexte de l'énoncé, qu'il n'était pas possible que les filles soient meilleures au bac que les garçons, surtout pour le bac scientifique ! Cet énoncé a ainsi donné lieu à une divulgation totalement inattendue de préjugés sur les capacités intellectuelles supposées des filles et des garçons.

Dans la deuxième phase de l'expérimentation, un tableau détaillant les statistiques du problème précédent est donné aux élèves. Les proportions de filles et garçons dans les deux séries sont bien sûr choisies pour que le paradoxe de Simpson apparaisse. Il est demandé aux élèves de compléter les pourcentages de réussite et de conclure sur les taux de réussite par section et globalement pour les deux séries. Les élèves ont, dans l'ensemble, réussi à calculer, sans erreur, les taux de réussite. Ils en ont déduit que, dans cet exemple, les filles ont un meilleur taux de réussite au bac S et au bac L séparément, mais elles ont un taux de réussite global au bac (séries S et L confondues) inférieur à celui des garçons. Bien que cette conclusion soit déduite du calcul statistique, certains élèves avouent ne toujours pas y croire et préfèrent se fier à leur « logique ». D'autres élèves concèdent que le calcul est juste mais n'excluent pas totalement non plus la conclusion intuitive qui semble plus vraie à leurs yeux : ils font coexister les deux conclusions sans pouvoir se décider définitivement pour l'une ou l'autre. Enfin, d'autres élèves sont réconfortés par le calcul : ils ont prouvé par les mathématiques que les garçons sont meilleurs au bac que les filles, ce qu'ils savaient depuis bien longtemps et ce dont il n'était pas permis de douter !

Le contexte de l'énoncé a induit des considérations subjectives de la part des élèves, ce qui rend délicate l'analyse des réactions des élèves au paradoxe. Difficile de dire si un élève est convaincu par le calcul mathématique ou parce que la conclusion conforte ses idées préconçues sur la réussite au bac comparée des filles et des garçons. Un cadre d'énoncé « neutre » aurait été sans doute plus approprié pour éviter des interférences avec des a priori personnels.

IV.7. Le problème de l'« irrationalité de $\sqrt{4}$ »

Démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$ est un des « thèmes » du programme de la classe de seconde traité en début de progression annuelle dans cette classe, par une approche historique, dans le chapitre sur les ensembles de nombres. Pour cette expérimentation sur les paradoxes, nous avons choisi de revenir sur une démonstration par l'absurde de ce résultat et de la faire généraliser à d'autres nombres par les élèves. Les élèves sont invités à lire une démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, puis à compléter une démonstration à trous similaire pour $\sqrt{3}$, et enfin à écrire entièrement, toujours en suivant le même modèle, une démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{4}$ (cf. Annexe 6). Une expérience comparable, dont nous nous sommes inspirée, a été analysée par Movshovitz-Hadar et Hadass en 1990. Évidemment, la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{4}$ est incorrecte car $\sqrt{4}$ est égal à 2 qui est un nombre rationnel. Il est attendu des élèves qu'ils comprennent la démonstration donnée, soient capables de compléter les deux autres démonstrations à partir du modèle, puis qu'ils se rendent compte que $\sqrt{4}$ est rationnel et que, par conséquent, la démonstration pour $\sqrt{4}$ n'est pas correcte, et qu'enfin ils localisent l'erreur de raisonnement (la proposition « p^2 est un multiple de 4 implique que p est un multiple de 4 » est fausse).

L'analyse des productions d'élèves montre que la quasi-totalité des élèves ont réussi à compléter entièrement les démonstrations en suivant le modèle. Cependant, uniquement la moitié de la classe a réalisé qu'il y a une contradiction entre le résultat démontré et le fait que $\sqrt{4}$ est un rationnel. La démarche de démonstration par l'absurde ne semble pas encore bien comprise par tous les élèves. Ils ne voient d'ailleurs pas l'intérêt de faire une démonstration pour un résultat si évident. Aucun élève n'a trouvé où pouvait bien se situer l'erreur dans le raisonnement. Lors de la mise en commun, lorsque l'argument spécieux de la démonstration « p^2 est un multiple de 4 implique que p est un multiple de 4 » a été mis en évidence, les élèves ont été prompts à trouver un contre-exemple à cette proposition qui invalide définitivement la démonstration. Pour une moitié de la classe, ce paradoxe apparent a provoqué un conflit cognitif entre deux idées, qui les a fait douter de la démonstration et les a incités à chercher longuement d'où pouvait bien provenir l'erreur, en examinant pas à pas une démonstration. Ce type d'exercices développe des capacités d'analyse de démonstration où ils doivent faire preuve d'esprit critique sur toute proposition énoncée. Par ce biais, ils remettent en doute chacune des assertions intervenant dans cette démonstration qui teste la fragilité de leurs connaissances, et apprennent à identifier des lacunes, des erreurs, des inexactitudes et à aiguiser leur capacité à les détecter. Ce genre d'exercices donne l'opportunité aux élèves de chercher, de réfléchir comme des mathématiciens professionnels et de participer à leur niveau à des controverses mathématiques. Dans cette perspective, le but ultime de leur formation mathématique ne serait-il pas qu'ils parviennent à considérer chaque démonstration comme une incitation à la contestation et à la réflexion plutôt que comme une vérité absolue et immuable.

IV.8. Problème du trapèze

Une démonstration fallacieuse du fait que la somme des longueurs des côtés parallèles d'un trapèze est nulle est donnée aux élèves (cf. Annexe 7). À eux de trouver où se niche l'erreur de raisonnement dans les propositions exposées. La résolution de ce problème fait appel à des connaissances de base sur les calculs de fractions et au théorème de Thalès. La compréhension de la démonstration ne doit donc pas poser de problèmes à un élève de seconde. Les productions des élèves ne sont pas détaillées dans ce document. Le but de l'activité est de mettre les élèves face une démonstration d'un résultat absurde causé par une erreur qu'ils font fréquemment : simplifier les deux membres d'une égalité par un facteur nul. Le caractère étonnant du résultat provient d'une erreur imperceptible que les élèves jugent anodine lorsqu'ils la commettent dans leurs calculs, mais qui, ici, provoque une absurdité marquante qui peut laisser une empreinte durable dans la tête des élèves pour éviter qu'ils ne reproduisent l'erreur de diviser par 0.

IV.9. Problèmes liés à la calculatrice

À l'entrée en seconde, les élèves sont généralement rompus au maniement d'une calculatrice, au point qu'elle semble indispensable pour effectuer le moindre calcul pour beaucoup d'entre eux. L'expérimentation intensive avec cet outil, dans les calculs proposés au collège, a forgé, dans la tête des élèves, l'idée que la calculatrice est infaillible, qu'elle a toujours raison et qu'elle « dit » toujours la vérité. Il est primordial de faire réaliser aux élèves que la calculatrice, en laquelle ils accordent une confiance aveugle, a en fait des limites de diverses natures qui peuvent lui faire dire des grosses bêtises et qu'il convient de toujours examiner un résultat affiché avec un œil critique. En effet, la calculatrice peut assez facilement être mise en défaut et l'élève doit progressivement devenir capable de détecter et de prévoir des erreurs dues aux limitations de cet outil, voire de les étudier et de les contrôler. L'approche préliminaire à ce long apprentissage consiste à confronter l'élève à des problèmes pièges où la calculatrice peut « mentir » ou carrément « délirer » (cf. Annexe 8). Ces comportements peu ordinaires de la calculatrice étonnent énormément les élèves qui apprennent à se méfier de ses résultats. L'analyse des limitations d'une calculatrice et de ses conséquences sur les calculs permet à l'élève de comprendre d'où proviennent certaines erreurs qu'elle fait et de les anticiper. Cette activité, qui est aussi le sujet d'un « thème » du programme de seconde, a été l'occasion de découvrir les notions de zone aveugle numérique, de capacité et d'étendue d'une calculatrice.

IV.10. Paradoxes logiques

Concernant l'enseignement de la logique, le programme de la classe de seconde (B.O. HS n° 6 du 12 août 1999) précise qu'« il ne s'agit pas de faire des cours de logique formelle, mais on n'hésitera pas à aborder les problèmes de logique lorsqu'ils se présentent, notamment lors du travail écrit ». Il nous a ainsi paru intéressant de faire réfléchir les élèves sur des paradoxes logiques célèbres qui font partie d'une culture générale en mathématiques et qui vont leur donner l'occasion de manipuler des propositions logiques. Deux paradoxes ont été discutés :

- Épiménide le Crétois affirme que « tous les crétois sont des menteurs », avec la règle sous-entendue que les menteurs mentent toujours et que les personnes qui disent la vérité la disent toujours. Épiménide a-t-il dit vrai ?
- le paradoxe du barbier dû au logicien britannique Bertrand Russell, version concrète équivalente au paradoxe de l'ensemble de tous les ensembles qui ne s'incluent pas eux-mêmes. Ce paradoxe fut à l'origine d'une crise féconde des fondements mathématiques et a permis de jeter les bases de la logique moderne à l'aube du XX^{e} siècle. Ce paradoxe peut s'énoncer ainsi : sur l'enseigne du barbier de Séville, on peut lire « Je rase tous les hommes de Séville qui ne se rasent pas eux-mêmes et seulement ceux-là. » Qui rase alors le barbier ?

Ces paradoxes logiques sont très appréciés des élèves. Pour eux, la logique ne fait pas réellement partie des mathématiques : les questions logiques mettent dès lors tous les élèves en confiance, quelles que soient les difficultés qu'ils peuvent avoir sur d'autres sujets mathématiques. Nous avons observé qu'ils affectionnent faire des déductions, surtout lorsqu'elles aboutissent à des propositions contradictoires irréconciliables. Le paradoxe logique, instigateur d'étonnement, se révèle être, pour les élèves, une salutaire récréation de la raison, une irrésistible invitation à « accepter l'inacceptable », à « comprendre l'incompréhensible », à « penser l'impensable ».

V. Conclusion

L'expérimentation de paradoxes mathématiques en classe de seconde s'est révélée riche d'enseignements pour les élèves. Ceux-ci ont pu en effet approcher des activités mathématiques d'un nouveau type qui les ont étonnés et souvent déstabilisés par les conflits cognitifs qu'elles ont engendrés. Au travers des expériences menées et analysées, l'intérêt de cette pédagogie de l'étonnement s'est révélé à maintes reprises et dans divers aspects (méthodologique, métacognitif, psychologique etc.), et notamment cognitif. Par le biais des problèmes étonnants, les élèves ont été confrontés à des situations qui les ont forcés à réfléchir en profondeur, à se convaincre par des démonstrations qui remettent en cause des fausses évidences et leurs « automathismes » de pensée. Dans les problèmes présentés, les conclusions, obtenues à partir d'erreurs imperceptibles et habituellement insignifiantes aux yeux des élèves, ont été poussées au paroxysme de l'absurdité afin de provoquer des conflits cognitifs intenses. Ceux-ci sont supposés provoquer une réorganisation des connaissances chez l'apprenant tendant vers une plus grande cohérence interne de ses conceptions. Afin d'éprouver cette hypothèse de travail, il conviendrait d'évaluer finement, par une étude sur une longue période temporelle, dans quelle mesure les conceptions des élèves se sont réellement transformées grâce aux problèmes étonnants et si les évolutions observées sont durables.

Finalement, si les observations préliminaires effectuées dans cette expérimentation semblent conforter l'idée que, chez l'élève, l'étonnement induit un questionnement et une remise en cause de ses propres connaissances indispensables à un apprentissage des mathématiques fondé sur le sens, tout en suscitant une formidable motivation pour résoudre des problèmes, elles ont néanmoins déjà laissé entrevoir des limites de cette pédagogie expérimentale. En effet, celle-ci a fait naître, chez certains élèves, des réactions attentatoires à l'apprentissage et une amplification inquiétante de la confusion de leurs idées de façon temporaire. Ainsi, l'ébauche de réflexion entreprise lors de cette expérimentation amène de nombreuses pistes de recherche à explorer : par exemple, déterminer les conditions et des moyens d'application pertinents d'une pédagogie de l'étonnement en mathématiques.
Enfin, on notera que l'objectif d'étonnement a été doublement atteint de façon imprévue : si les problèmes ont été étonnants pour les élèves, ces derniers se sont révélés être encore plus fortement étonnants pour l'enseignante qui a mené l'expérimentation : « *Telle est étonnée qui croyait étonner !* ». Les réactions des élèves et les bouleversements de leurs conceptions constituent un trésor didactique à analyser que nous ne nous attendions pas à découvrir en nous engageant dans cette expérimentation de paradoxes.

Cette envie de pratiquer une pédagogie de l'étonnement tire peut-être son inspiration de cette description, faite par Jules Tannery en 1894, du professeur mathématicien Charles Hermite, qui pourrait incarner une sorte d'idéal de professeur de mathématiques :
« Tous ceux qui ont reçu à l'École l'enseignement de M. Hermite, en première année, ont gardé le souvenir de cet étonnement profond et fécond que leur ont causé ses premières conférences : ils arrivaient, plus naïfs qu'aujourd'hui, du fond des provinces, pour la plupart; ils avaient eu d'excellents professeurs, bien clairs, bien précis, bien ordonnés, bien méthodiques et traçant bien régulièrement leur sillon: ce sillon, ils avaient suivi de leur mieux, sans voir autre chose que le dos de celui qui menait l'attelage. L'enseignement de M. Hermite causait une vraie stupeur. [...]
Une autre fois, le, maître mettait sur le tapis un tout petit fait, une petite proposition bien banale. Qu'un homme comme M. Hermite daignât en parler, et en parler à des élèves de l'École Normale Supérieure, cela faisait sourir: il retournait le petit théorème et lui découvrait des dessous extraordinaires, des prolongements inattendus: derrière, c'était un monde. L'émerveillement venait et durait toute l'année. »

C'est humblement dans ce « monde »-là que nous cherchons à emmener nos élèves.