PLAN MATHS COLLEGE

ATELIERS RESOLUTION DE PROBLEMES

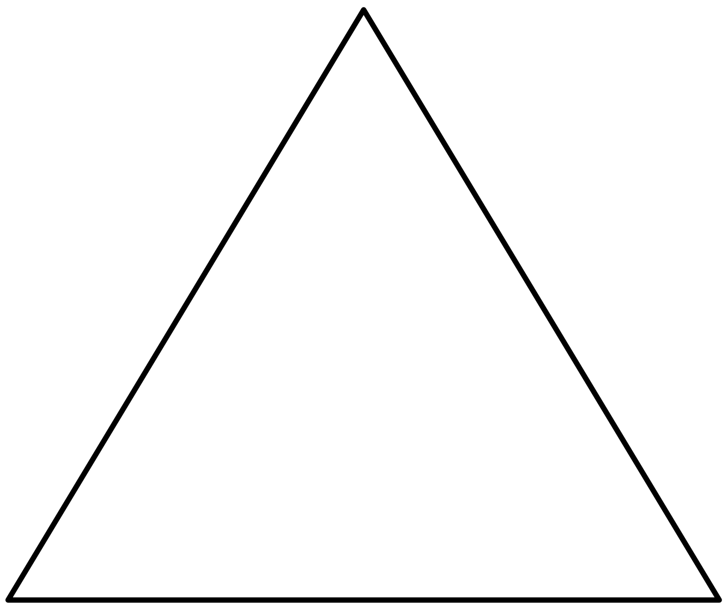
RÉGION ACADÉMIQUE
GUYANE

Liberté
Égalité
Fraternité

Année scolaire 2022-2023

SOMMAIRE

ABSTRAIRE



MANIPULER

REPRÉSENTER
VERBALISER *

* : Dans cet atelier la représentation est privilégiée.
La verbalisation est l’objet du travail de l’atelier « oral en mathématiques ».

CHOIX DU DOMAINE :
NOMBRES ET CALCULS
Penser les outils dans la durée, la continuité, la progressivité des apprentissages

Manipuler

Représenter

Diagramme barre
Pré-algèbre

Modéliser

Expressions algébriques

Validité
Tester
Essais-Erreurs

Égalité
Transformer

Résoudre

Démontrer

RETOUR AU SOMMAIRE

Programmes et schémas de calcul

Une bouteille et sa capsule coûtent 1,10 €. La bouteille coûte 1 € de plus que la capsule.
Combien coûte la bouteille ? Combien coûte la capsule ?

Erreur attendue :
La capsule coûte 0,10 € et la bouteille 1 €.

→ **Traitement de l'erreur**

Question : est-ce que la bouteille coûte 1 € de plus que la capsule ?

Développement (**raisonner**) :
Si la capsule coûte 0,10 €, alors la bouteille devrait coûter 1,10 € et on aurait au total un prix de 1,20 €.
C'est trop ! La capsule doit coûter moins.

Et ensuite ? → **essais erreurs**
Long , répétitif → outil numérique

Une bouteille et sa capsule coûtent 1,10 €. La bouteille coûte 1 € de plus que la capsule.
Combien coûte la bouteille ? Combien coûte la capsule ?

	A	B	C
1	capsule	bouteille	total
2	0,00	1,00	1,00
3	0,01	1,01	1,02
4	0,02	1,02	1,04
5	0,03	1,03	1,06
6	0,04	1,04	1,08
7	0,05	1,05	1,10
8	0,06	1,06	1,12
9	0,07	1,07	1,14
10	0,08	1,08	1,16
11	0,09	1,09	1,18
12	0,10	1,10	1,20
13			
14			

- Créer une formule (**modéliser**)
- Choix du pas (**raisonner**)

Un manteau et une chemise coûtent ensemble 164 €.
Le manteau coûte trois fois plus cher que la chemise.
Combien coûte le manteau et combien coûte la chemise ?

Essais successifs

Chemise : 10 €
Manteau : 10x3=30 €
Ensemble: 40 €

→ pas assez

Chemise : 20 €
Manteau : 20x3=60 €
Ensemble : 80 €

→ pas assez

Long , répétitif → outil numérique

Un manteau et une chemise coûtent ensemble 164 €.
Le manteau coûte trois fois plus cher que la chemise.
Combien coûte le manteau et combien coûte la chemise ?

	A	B	C	D	E	F	G
1	chemise	manteau	ensemble		chemise	manteau	ensemble
2	10	30	40		40	120	160
3	20	60	80		41	123	164
4	30	90	120		42	126	168
5	40	120	160		43	129	172
6	50	150	200		44	132	176
7					45	135	180
8					46	138	184
9					47	141	188
10					48	144	192
11					49	147	196
12					50	150	200
13							

- Créer une formule (**modéliser**)
- Changement de pas (**raisonner**)

Une procédure en accord avec les programmes …

Repères annuels de progression pour le cycle 4 – programme de 2019.

En 5ème :
Les expressions littérales.
Les expressions littérales sont introduites à travers **des formules** mettant en jeu des grandeurs ou traduisant **des programmes de calcul**.

Produire une formule (tableur), une expression littérale (cadre général mathématique)

Objectif ?

- décrire une situation générale,
- éviter d'avoir à repenser le problème à chaque nouvelle valeur attribuée a la variable.

Difficultés ?

On considère les deux programmes de calcul ci-dessous.
Peut-on trouver un nombre pour lequel les deux programmes de calcul donnent le même résultat ?

extrait DNB 2016 Métropole, Antilles-Guyane.

Tableur

<u>Programme A</u>

1. Choisir un nombre : cellule A1.
2. Multiplier par -2 : =A1*(-2).
3. Ajouter 13 : =A1*(-2)+13.

Calcul littéral

<u>Programme B</u>

1. Choisir un nombre : x.
2. Soustraire 7 : $x-7$.
3. Multiplier par 3 : $(x-7)\times 3$.

Aspect procédural du calcul

Aspect structural du calcul :

Somme : A=A1*(-2)+13 et produit : B=$3(x-7)$

- **Priorités des opérations, rôle des parenthèses**
- **Convention d'écriture**

Une procédure en accord avec les programmes …

Repères annuels de progression pour le cycle 4 – programme de 2019.

En 6ème :
Calcul.
Dans des calculs simples, confrontés à des problématiques de priorités opératoires, par exemple en relation avec l'utilisation de calculatrices, les **élèves utilisent des parenthèses**.

En 5ème :
Nombres décimaux relatifs.
Le travail mené au cycle 3 sur **l'enchaînement des opérations** […]est poursuivi.
Les expressions littérales.
Les notations du calcul littéral (par exemple 2a pour a × 2 ou 2 × a, ab pour a × b) sont **progressivement** utilisées, en lien avec les **propriétés de la multiplication**.

Calcul littéral pour modéliser

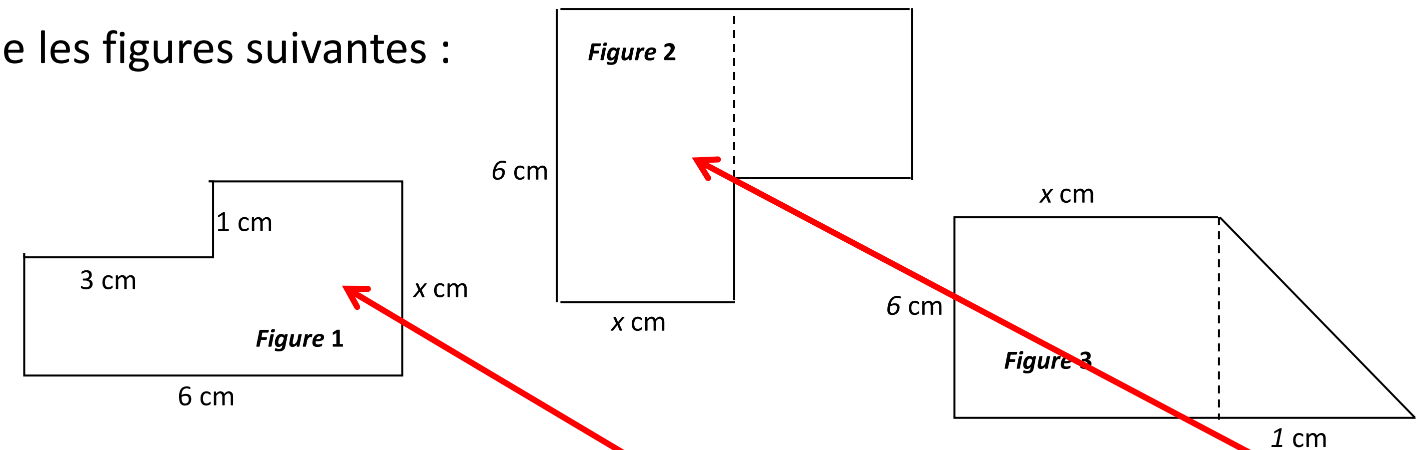
La production de formules entraîne deux questions :

- celle de la validation : la formule obtenue est-elle correcte ?
- celle de l'équivalence : les différentes expressions littérales (formules) obtenues sont-elles égales ?

Validation / Sens

Le rectangle plus un carré

On donne les figures suivantes :



Le rectangle moins …

On donne aussi les formules suivantes : $A=\boxed{6x}-3$ $B=6x+3$ $\mathbf{C}=\boxed{6x}+x^2$

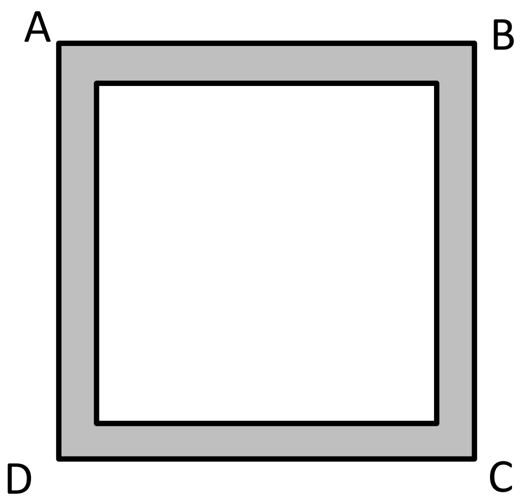
Associe à chaque figure la formule qui permet de calculer son aire.

Stratégies de résolution ?

SENS DES OPERATIONS 6ème

Validation / Test

Autre stratégie :



ABCD est un carré de côté de longueur 5 cm. L'allée grise a une largeur constante notée x.
Parmi ces formules lesquelles permettent de calculer l'aire du carré blanc ?

$A=(5-2x)^2$ $B= 25-4x$ $C= 25-4x^2$ $D= 25-4x+x^2$

TEST : pour x= 1 on doit trouver $3^2 = 9$

Stratégie de contrôle de leurs propres formules pour élèves -> calculatrice, tableur

Vers la démonstration : égalité vraie pour tout x

Vers la résolution d'équation : égalité vraie pour certaines valeurs de x

Une procédure en accord avec les programmes …

Repères annuels de progression pour le cycle 4 – programme de 2019.

En 5ème :

Les expressions littérales.

Les élèves **substituent une valeur numérique à une lettre pour calculer la valeur d'une expression littérale**.

Equations.

Les élèves sont amenés à **tester** si une égalité où figure une lettre est vraie lorsqu'on lui attribue une valeur numérique.

Les élèves testent des égalités par **essais erreurs**, à la **main** ou à l'aide d'une **calculatrice** ou d'un **tableur**, des valeurs numériques dans des expressions littérales, ce qui constitue une première approche de la notion de solution d'une équation, sans formalisation à ce stade.

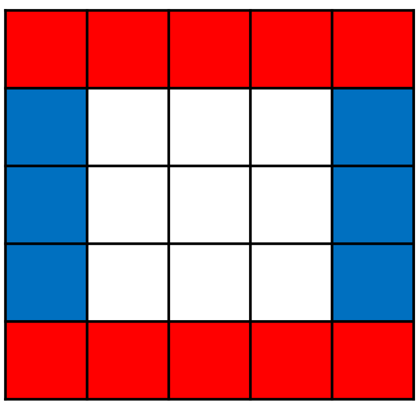
Equivalence / Sens

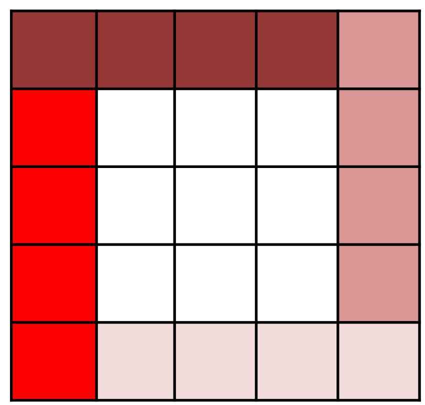
Manipulation mode symbolique

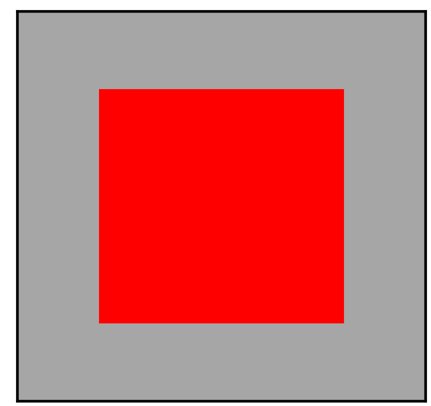
$N = 2n + 2(n-2)$

$N = 4(n-1)$

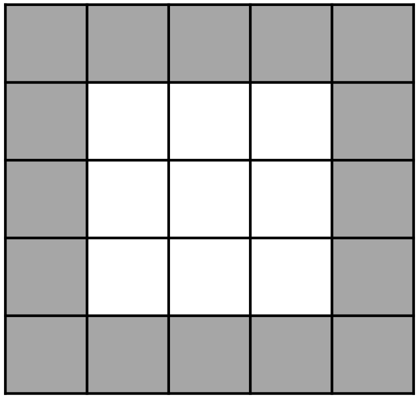
$N = n^2 - (n-2)^2$







Equivalence / Transformation d'écriture



$$N = 4n - 4$$

$$N = 2n + 2(n - 2)$$

$$N = 4(n - 1)$$

$$N = n + 2(n - 1) + (n - 2)$$

$$N = n^2 - (n - 2)^2$$

Développer / Factoriser / Réduire

LOI DE DISTRIBUTIVITE

Une procédure en accord avec les programmes …

Repères annuels de progression pour le cycle 4 – programme de 2019.

En 5ème :

Les expressions littérales.

L'usage de la lettre permet **d'exprimer un résultat général** (par exemple qu'un entier naturel est pair ou impair) ou de **démontrer** une propriété générale (par exemple que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3).

Distributivité.

Tôt dans l'année, sans attendre la maîtrise des opérations sur des nombres relatifs, la **propriété de distributivité simple** est utilisée pour réduire une expression littérale de la forme $ax + bx$, où a et b sont des nombres décimaux.

Le lien est fait avec des procédures de calcul numérique déjà rencontrées au cycle 3 (calculs du type 12 × 50 ; 37 × 99 ; 3 × 23 + 7 × 23).

Modélisation algébrique / quelle représentation ?

<u>Programme A</u>

1. Choisir un nombre.
2.Multiplier par −2.
3. Ajouter 13.

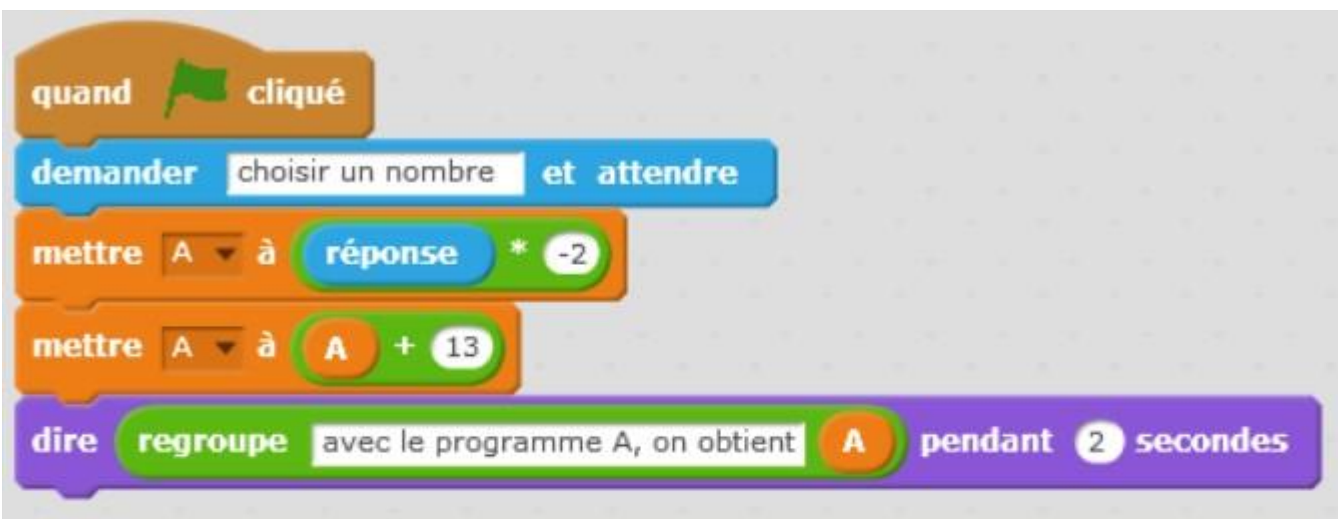
<u>Programme B</u>

1. Choisir un nombre.
2. Soustraire 7.
3. Multiplier par 3.

Schémas de calculs

$$5 \xrightarrow{\times(-2)} \xrightarrow{+13} 3$$

$$5 \xrightarrow{-7} \xrightarrow{\times 3} -6$$



Modélisation algébrique / quelle représentation ?

<u>Programme A</u>

1. Choisir un nombre.
2. Multiplier par −2.
3. Ajouter 13.

<u>Programme B</u>

1. Choisir un nombre.
2. Soustraire 7.
3. Multiplier par 3.

Schémas de calculs

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, shift left, "\times(-2)"] & \cdot \arrow[l, shift left, "\div(-2)"] \arrow[r, shift left, "+13"] & 3 \arrow[l, shift left, "-13"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, shift left, "-7"] & \cdot \arrow[l, shift left, "+7"] \arrow[r, shift left, "\times 3"] & -6 \arrow[l, shift left, "\div 3"] \end{tikzcd}$$

Résolution d’équation par remontée de chaînes

$$x = \frac{3-13}{-2}$$

$$x = \frac{-6}{3} + 7$$

RETOUR AU SOMMAIRE

Mise en place des propriétés algébriques

On considère les deux programmes de calcul ci-dessous.
Peut-on trouver un nombre pour lequel les deux programmes de calcul donnent le même résultat ?

Programme A	**Programme B**
1. Choisir un nombre.	1. Choisir un nombre.
2.Multiplier par −2.	2. Soustraire 7.
3. Ajouter 13.	3. Multiplier par 3.

extrait DNB 2016 Métropole, Antilles-Guyane.

$$x \xrightarrow{\times(-2)} \xrightarrow{+13} -2x+13$$

$$x \xrightarrow{-7} \xrightarrow{\times 3} (x-7)\times 3$$

Équation : $-2x+13=3(x-7)$

se ramenant à : $-2x+13=3x-21$

$$-2x + 13 = 3x - 21$$

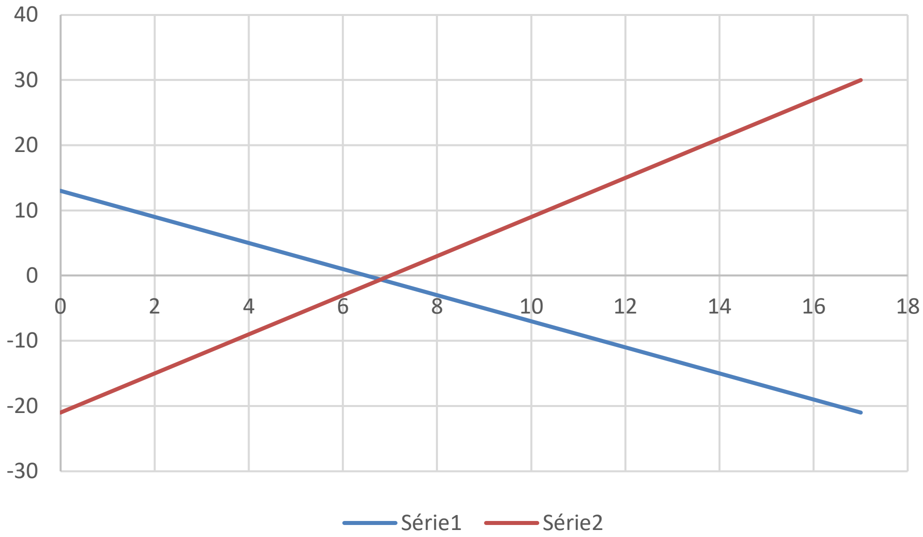
- grande difficulté de recourir aux définitions des opérations ;
- impossibilité de remonter une chaîne de calcul ;
- solution non triviale ($x = 6{,}8$)

Par contre possibilité de procéder par essais successifs :

	A	B	C
1	**nombre de départ**	**programme A**	**programme B**
2	-5	23	-36
3	-4	21	-33
4	-3	19	-30
5	-2	17	-27
6	-1	15	-24
7	0	13	-21
8	1	11	-18
9	2	9	-15
10	3	7	-12
11	4	5	-9
12	5	3	-6
13	**6**	**1**	**-3**
14	**7**	**-1**	**0**
15	8	-3	3
16	9	-5	6
17	10	-7	9

Difficulté : comprendre ce qui se passe

Par contre possibilité de procéder par essais successifs :



Difficulté : comprendre ce qui se passe

$$\boxed{a = b \Leftrightarrow a - b = 0}$$

$$\boldsymbol{a = b \Leftrightarrow \quad a - b = 0}$$

x	PgA	PgB	PgB-PgA
0	13	-21	-34
1	11	-18	-29
2	9	-15	-24
3	7	-12	-19
4	5	-9	-14
5	3	-6	-9
6	1	-3	-4
7	-1	0	1
8	-3	3	6
9	-5	6	11
10	-7	9	16
11	-9	12	21
12	-11	15	26
13	-13	18	31
14	-15	21	36
15	-17	24	41
16	-19	27	46
17	-21	30	51

Puis en changeant le pas :

	A	B	C	D
1	**nombre de départ**	**programme A**	**programme B**	**B-A**
2	6	1	-3	-4
3	6,1	0,8	-2,7	-3,5
4	6,2	0,6	-2,4	-3
5	6,3	0,4	-2,1	-2,5
6	6,4	0,2	-1,8	-2
7	6,5	0	-1,5	-1,5
8	6,6	-0,2	-1,2	-1
9	6,7	-0,4	-0,9	-0,5
10	**6,8**	**-0,6**	**-0,6**	**0**
11	6,9	-0,8	-0,3	0,5
12	7	-1	0	1
13	7,1	-1,2	0,3	1,5
14	7,2	-1,4	0,6	2
15	7,3	-1,6	0,9	2,5
16	7,4	-1,8	1,2	3
17	7,5	-2	1,5	3,5
18				

$$\boxed{a = b \iff a - b = 0}$$

Interprétation algébrique :

Équation : $-2x + 13 = 3(x - 7)$

$$\boxed{\boldsymbol{a = b \Leftrightarrow a - b = 0}}$$

$$-2x + 13 - 3(x - 7) = 0$$
$$-2x + 13 - 3x + 21 = 0$$
$$-5x + 34 = 0$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, shift left, "\times(-5)"] & {} \arrow[l, shift left, "\div(-5)"] \arrow[r, shift left, "+34"] & 0 \arrow[l, shift left, "-34"] \end{tikzcd}$$

Résolution d'équation par remontée de chaînes

$$x = \frac{0 - 34}{-5}$$

$$x = 6{,}8$$

Problème 8 : *extrait EPM 2018 -Guyane.*

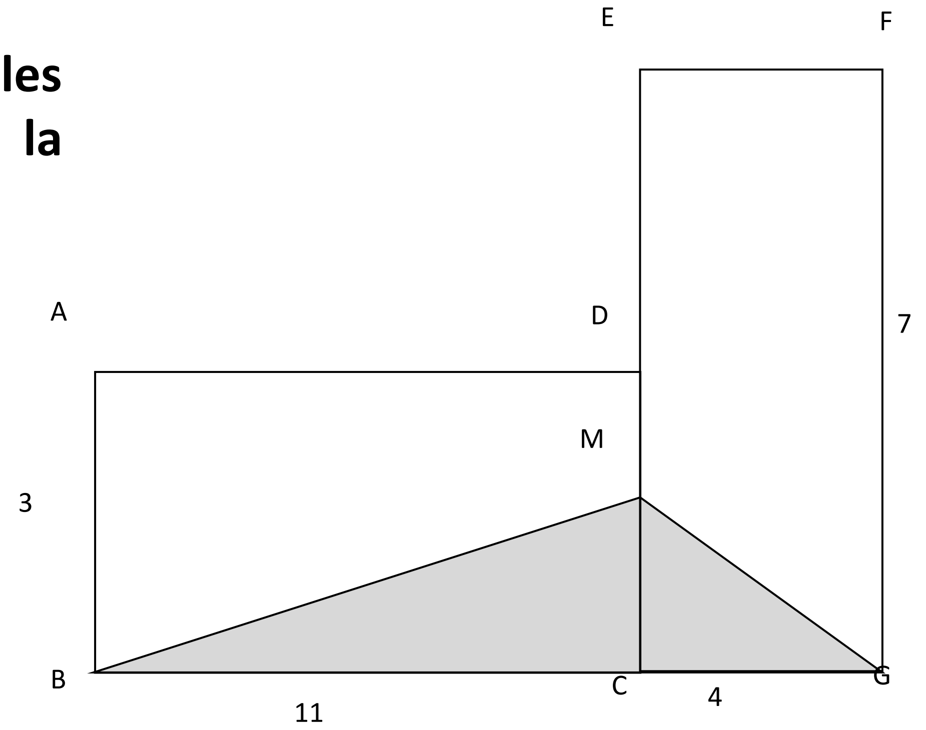
Un agriculteur veut que les trapèzes ADMB et EFGM aient la même aire.

On note : CM = x

On donne :

Aire $_{ADMB}$ = $33 - 5{,}5\,x$

Aire $_{EFGM}$ = $28 - 2\,x$



$$33 - 5{,}5x = 28 - 2x$$

$$33 - 5{,}5x = 28 - 2x$$

La possibilité de procéder par essais successifs est mise en défaut : solution rationnelle, non décimale $x = \frac{10}{7}$.

Interprétation algébrique :

Équation : $33 - 5{,}5x = 28 - 2x$

$$\boxed{\boldsymbol{a = b \Leftrightarrow a - b = 0}}$$

$$33 - 5{,}5x - (28 - 2x) = 0$$
$$33 - 5{,}5x - 28 + 2x = 0$$
$$5 - 3{,}5x = 0$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, shift left, "\times(-3{,}5)"] & {} \arrow[r, shift left, "+5"] \arrow[l, shift left, "\div(-3{,}5)"] & 0 \arrow[l, shift left, "-5"] \end{tikzcd}$$

Résolution d’équation par remontée de chaînes

$$x = \frac{0 - 5}{-3{,}5}$$

$$x = \frac{10}{7}$$

$$\boxed{a = b \Leftrightarrow a - b = 0}$$

démontre

$$\boxed{a = b \Leftrightarrow a + c = b + c}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} pour\ c \neq 0 \\ a = b \Leftrightarrow a \times c = b \times c \end{array}}$$

$$33 - 5{,}5x = 28 - 2x$$

$$33 - 5{,}5x + 2x = 28 - 2x + 2x$$

$$33 - 3{,}5x = 28$$

$$33 - 3{,}5x - 33 = 28 - 33$$

$$-3{,}5x = -6$$

$$\frac{-3{,}5}{-3{,}5}x = \frac{-6}{-3{,}5}$$

$$x = \frac{12}{7}.$$

Propriétés utiles :

$$\boxed{\boldsymbol{a = b \Leftrightarrow a + c = b + c}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\boldsymbol{pour\ c \neq 0} \\ \boldsymbol{a = b \Leftrightarrow a \times c = b \times c}\end{array}}$$

RETOUR AU SOMMAIRE

Autres cadres d'utilisation du schéma de calcul ?

5ème : introduction des relatifs

Voir :

- Support pdf « traitement de l'erreur » (atelier Automatismes / Plan maths collège)
- Expérimentation « introduire les nombres relatifs » année 2015-16 ; Bassin de Saint-Laurent-du-Maroni.
- Ressources : IFE-ENS-Lyon

5ème : introduction des relatifs

UNE ENTREE DANS L'ALGEBRE PAR LES NOMBRES RELATIFS

Parcours en étapes … sur la continuité (5ème)

Élaboration d'un technique pour calculer mentalement a + b – c

$$17 \xrightarrow{+26} \xrightarrow{-25} \; ?$$
$$17 \xrightarrow[+1]{\qquad\qquad} \; ?$$

Ajouter 26 et soustraire 25 à un nombre revient à ajouter 1 à ce nombre

…

$$17 \xrightarrow{+16} \xrightarrow{-18} \; ?$$
$$17 \xrightarrow[-2]{\qquad\qquad} \; ?$$

Ajouter 16 et soustraire 18 à un nombre revient à soustraire 2 à ce nombre

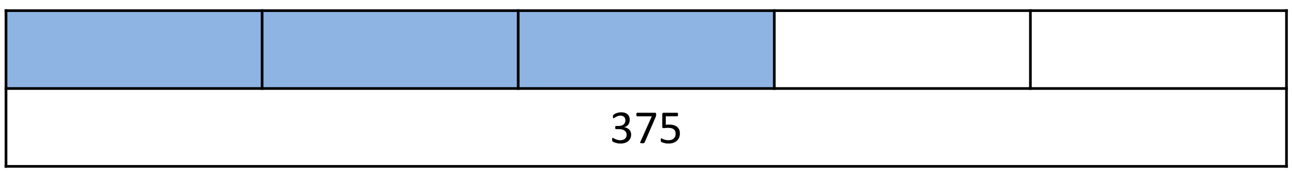
…

Définition des nombres relatifs, problème de leur addition.

4ème : « diviser c'est multiplier par l'inverse ».

A un nombre j'ajoute ces deux tiers. Je trouve 375.
Quel est ce nombre ?

Retour sur schéma « barres »
Voir pdf support atelier « résolution de problèmes I » / Plan maths collège



$$\frac{5}{3} \times x = 375 \qquad x = \frac{3}{5} \times 375$$

NB : au passage, « diviser c'est multiplier par l'inverse »

Problème 1 :
Pensez à un nombre
Le multiplier par 4
Diviser le résultat par 3

Si je trouve 20, à quel nombre ai-je pensé ?

$$x \xrightarrow{\times 4} \quad \xrightarrow{\div 3} 20$$

$$x \xleftarrow{\div 4} \quad \xleftarrow{\times 3} 20$$

Résolution d'équation par remontée de chaînes

La réponse : $x = \frac{20 \times 3}{4} = 15$

Problème 2 :

3 La majorité des photos prises avec un appareil compact numérique ont une longueur égale aux $\frac{4}{3}$ de leur largeur. Une photo de ce format a une longueur de 20 cm. Quelle est sa largeur ?

TRANSMATHS 4ème – Edition 2021 - Nathan

$$l \xrightarrow{\times \frac{4}{3}} 20$$

$$l \xleftarrow{\div \frac{4}{3}} 20$$

La question : comment on calcule $\boldsymbol{l = 20 \div \frac{4}{3}}$?

Le rapprochement des deux situations :

$$l \xrightarrow{\times \frac{4}{3}} 20$$

$$l \xleftarrow{\div \frac{4}{3}} 20$$

$$l \xrightarrow{\times 4} \quad \xrightarrow{\div 3} 20$$

$$l \xleftarrow{\div 4} \quad \xleftarrow{\times 3} 20$$

$$l \xleftarrow{\times \frac{3}{4}} 20$$

La question : comment on calcule $\boldsymbol{l = 20 \div \frac{4}{3}}$?

$$l \xrightarrow{\times \frac{4}{3}} 20$$

$$l \xrightarrow{\times 4} \quad \xrightarrow{\div 3} 20$$

$$l \xleftarrow{\div \frac{4}{3}} 20$$

$$l \xleftarrow{\div 4} \quad \xleftarrow{\times 3} 20$$

$$l \xleftarrow{\times \frac{3}{4}} 20$$

La propriété visée

La question : comment on calcule $\boldsymbol{l = 20 \div \frac{4}{3}}$?

La réponse : $\boldsymbol{l = 20 \times \frac{3}{4}}$?

RETOUR AU SOMMAIRE

La propriété dans le cadre général

$$l \xrightarrow{\times \frac{a}{b}} \mathrm{L}$$

$$l \xrightarrow{\times a} \quad \xrightarrow{\div b} \mathrm{L}$$

$$l \xleftarrow{\div a} \quad \xleftarrow{\times b} \mathrm{L}$$

$$l \xleftarrow{\div \frac{a}{b}} \mathrm{L}$$

$$l \xleftarrow{\times \frac{b}{a}} \mathrm{L}$$

Diviser par un nombre non nul revient à multiplier par son inverse

Attention : autre organisation mathématique.
Ici la notion d'inverse intervient après la découverte de la propriété.
Elle doit alors être explorée pour tous types de nombres.

ANNEXE : énoncés des problèmes étudiés

Une bouteille et sa capsule coûtent 1,10 €. La bouteille coûte 1 € de plus que la capsule. Combien coûte la bouteille ? Combien coûte la capsule ?

Un manteau et une chemise coûtent ensemble 164 €. Le manteau coûte trois fois plus cher que la chemise. Combien coûte le manteau et combien coûte la chemise ?

A un nombre j'ajoute ses deux tiers. Je trouve 375. Quel est ce nombre ?

Eloïse et Louis ont la même somme d'argent. Eloïse a dépensé 900 € et Louis a dépensé 1200 €. Maintenant Eloïse a trois fois plus d'argent que Louis. Quelle somme d'argent avaient-ils au départ ?

Enoncés des problèmes étudiés

Christian dépense $\frac{3}{5}$ d'une somme puis les deux tiers du reste. Finalement, il lui reste 39 euros. Quelle était la somme initiale ?

Un père dispose de 1600 € pour ses trois enfants. Il veut que l'aîné ait 200 € de plus que le second et que le second ait 100 € de plus que le dernier.
Quelle somme doit il donner à chacun ?

On considère les deux programmes de calcul ci-dessous.
Peut-on trouver un nombre pour lequel les deux programmes de calcul donnent le même résultat ?

<u>Programme A</u>

1. Choisir un nombre.
2. Multiplier par −2.
3. Ajouter 13.

<u>Programme B</u>

1. Choisir un nombre.
2. Soustraire 7.
3. Multiplier par 3.

extrait DNB 2016 Métropole, Antilles-Guyane.

Enoncés des problèmes étudiés

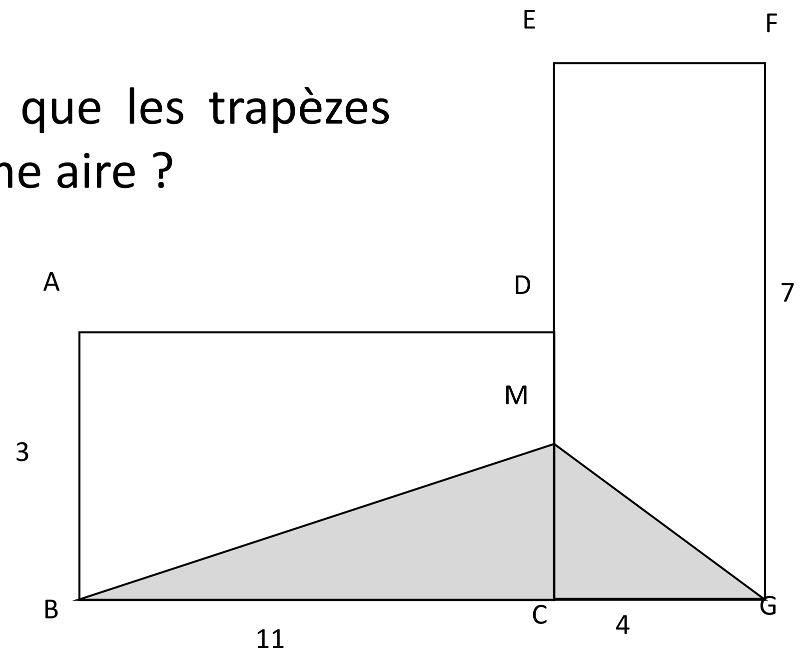
Où placer le point M pour que les trapèzes ADMB et EFGM aient la même aire ?

On note : CM = x

On donne :

Aire $_{ADMB}$ = $33 - 5{,}5\,x$

Aire $_{EFGM}$ = $28 - 2\,x$



extrait EPM 2018 –Guyane.

Un randonneur parcours 100 km en 3 jours.
Le deuxième jour il parcourt 10 km de moins que le premier jour.
Le troisième jour il parcourt le double de ce qu’il a parcouru le deuxième jour.
Calculer les distances parcourues le premier, le deuxième et le troisième jours.

Enoncés des problèmes étudiés

Des amis veulent louer un voilier.
S'ils participent avec 17 € chacun il y aura 33 € en trop. (1er cas)
S'ils participent avec 13 € chacun il manquera 15 €. (2ème cas)
On cherche le nombre d'amis et le prix de location du voilier.