MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

Olympiades nationales de mathématiques 2020

Académies de la Guadeloupe, de la Guyane et de la Martinique

Mercredi 11 mars de 8 h à 12h10

Pause de 10h à 10h10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**.

La première partie est constituée des exercices académiques. À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie, constituée des exercices nationaux.

Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant 12h10.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. **Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition**.

Chaque partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices académiques et nationaux 1 et 2.

Les autres candidats doivent traiter les exercices académiques et nationaux 1 et 3.

Première Partie : Exercices académiques de 8h à 10h

La résolution est collective et se fait par équipe de 2 ou 3 élèves.

Chaque équipe rend une seule copie

Exercice académique n° 1 : Le problème des ficelles

(À traiter par tous les candidats)

Une ancienne coutume slave, pour décider du mariage d'une jeune fille, voulait que l'on réalise l'expérience aléatoire suivante.
Trois morceaux de ficelle pliés en deux sont tenus dans la main comme l'indique la « Figure a ».
On noue deux par deux, au hasard, les six extrémités qui dépassent du poing fermé.

Figure a

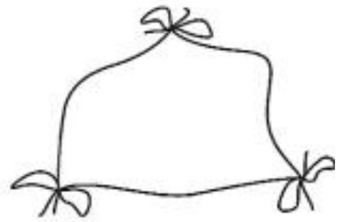
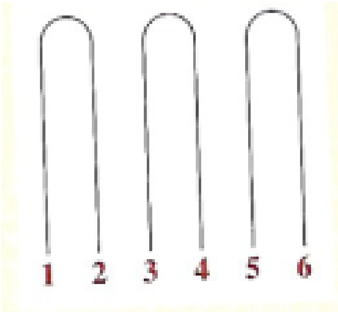


Figure b

On désigne par S l'événement : « Obtenir une boucle fermée à la fin de l'expérience » (Figure b).
Selon la coutume, la jeune fille ne se mariait que lorsque l'événement S se réalisait.

Le but de cet exercice est de déterminer quel est, de S ou $\bar{S}$, l'événement le plus probable.

1. Le modèle



En représentant les morceaux de ficelle comme l'indique la figure ci-contre, l'épreuve consiste alors à associer les nombres deux par deux. On convient de noter en premier la liaison avec le bout 1.

Un exemple d'issue est : {1 – 6 ; 2 – 3 ; 4 – 5}

a. Cette issue est-elle favorable à la réalisation de l'événement S ?

b. Expliquer pourquoi on peut se contenter de désigner l'issue précédente par : {1 – 6 ; 2 – 3} ?

Dans la suite de l'exercice, une issue sera notée avec deux liaisons.

2. Le calcul

a. Ecrire toutes les issues contenant la liaison « 1 – 2 ».

b. Combien y-a-t-il d'issues possibles ?

c. Calculer la probabilité $p(S)$ et conclure.

Exercice académique n°2 : L'étoile céleste

(À traiter par les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques)

Première partie : rectangle d'or

On dit que deux rectangles sont semblables lorsque les rapports $\frac{Longueur}{largeur}$ sont égaux.

Sur la figure n° 1 ci-contre, on considère le carré ABCD de côté AB $= \varphi$.

Á l'extérieur de ce carré, on construit le rectangle EFCB avec BE = 1. Le but de cette partie est de déterminer φ de sorte que les rectangles EFCB et EFDA soient semblables.

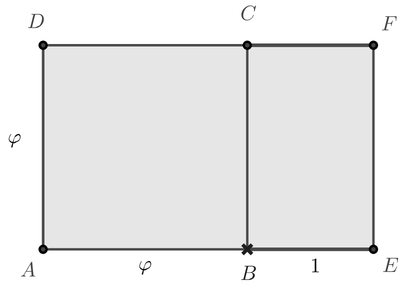


FIGURE 1 – *Les rectangles AEFD et EFCB sont semblables.*

1. Montrer que dans ce cas φ est une solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
2. Résoudre cette équation et déterminer la valeur de φ.

On appelle *rectangle d'or*, tout rectangle dont la longueur L et la largeur l vérifient

$$\frac{L}{l} = \varphi, \qquad \varphi \quad \text{étant le nombre positif tel que} \quad \varphi^2 = \varphi + 1.$$

3. Montrer que tout agrandissement ou réduction de rapport k d'un rectangle d'or, est encore un rectangle d'or.
4. Le rectangle EFDA est-il un agrandissement du rectangle EFCB ?.

Deuxième partie : l'étoile céleste

Sur la figure 2 ci-contre, les diagonales des deux rectangles d'or, EFDA et EFCB forment une étoile, appelée : étoile céleste.

1. Montrer que BG $= 1$.
2. En déduire que FCGN est un rectangle d'or.
3. Que vaut le rapport $\frac{\text{AF}}{\text{CE}}$?

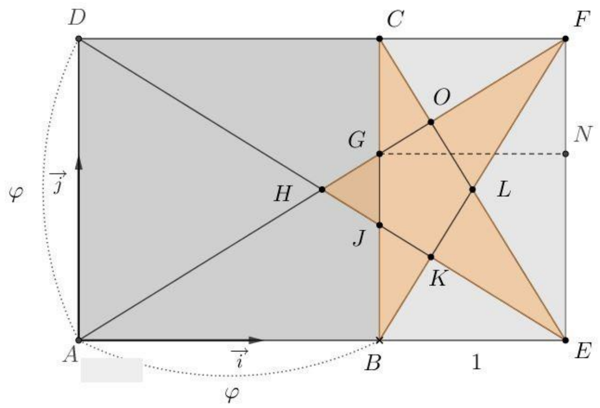


FIGURE 2 – *L'étoile céleste et son pentagone*

On se place dans le repère orthonormé $(A; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$, avec $\vec{i} = \frac{1}{\varphi}\,\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \frac{1}{\varphi}\,\overrightarrow{AD}$.

Ainsi, dans ce repère, on a B $(\varphi; 0)$ et D$(0; \varphi)$.

4. Montrer que les droites (AF) et (CE) sont perpendiculaires
5. Déterminer les coordonnées x_0 et y_0 du point 0.

Troisième partie : La spirale d'or

En poursuivant le processus entamé dans la deuxième partie, on construit des rectangles d'or de plus en plus petits comme le montre la figure 3 ci-dessous

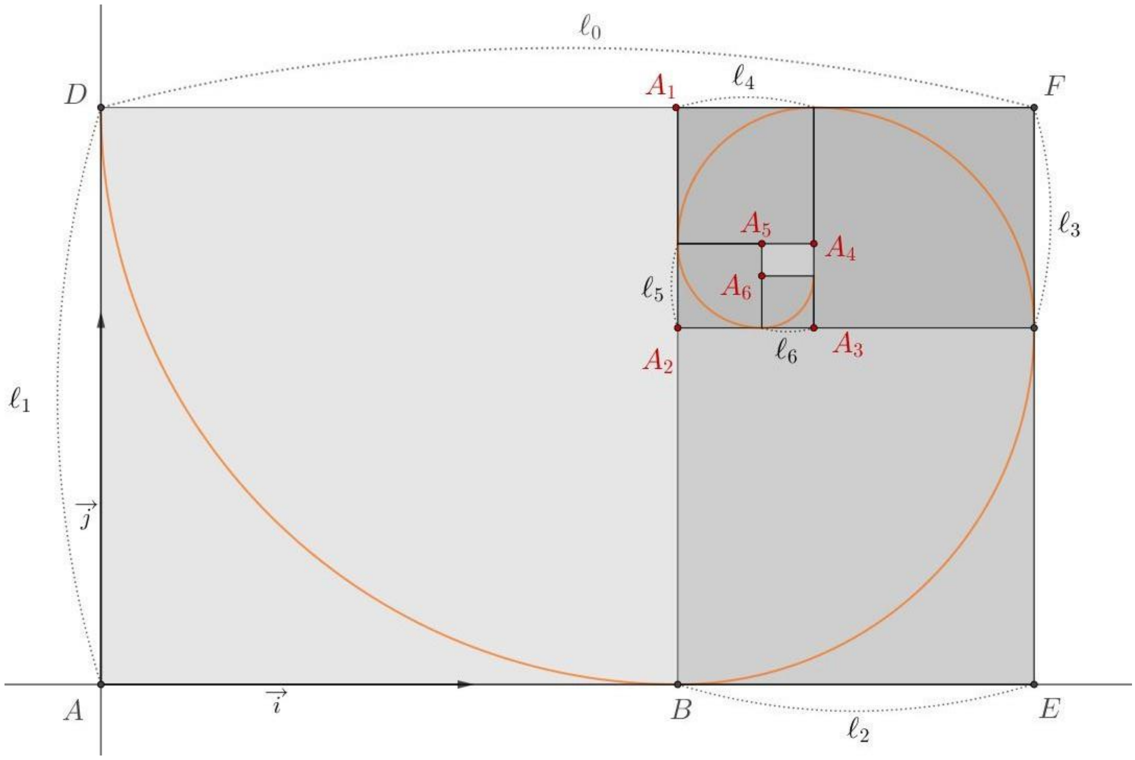


FIGURE 3 – *La spirale d'or*

Chaque rectangle contient un carré dans lequel on dessine un quart de cercle dont on a représenté les premiers centres : $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. L'ensemble de ces arcs forment la spirale d'or. Le but de cette partie est de vérifier numériquement que les centres A_{2n}, pour n entier naturel, $n \geq 1$, se rapprochent du point 0. On pose $l_0 = AE = \varphi + 1$; et $l_1 = AD = \varphi$.

De manière générale, on note l_n la longueur du $(n+1)^{ième}$ rectangle.

1. Montrer que la suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

En observant la figure 3, on voit que les points A_1 et A_2 ont respectivement pour coordonnées :

$$A_1(l_0 - l_2; l_1) \quad \text{et} \quad A_2\,(l_0 - l_2; l_1 - l_3)$$

2. Déterminer les coordonnées de chacun des points A_3, A_4, A_5, A_6. Conjecturer une expression de chacune des coordonnées x_{2n} et y_{2n} du point A_{2n}.
3. On appelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général :

$$u_n = l_0 - l_2 + l_4 + \cdots + (-1)^n l_{2n} \quad . \quad \text{On admet que } \; l_n = l_0 \times \frac{1}{\varphi^n}$$

4. Écrire un programme sous Python, ou un algorithme en langage naturel qui permet d'afficher les premiers termes de cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Trouver le rang n_0 à partir duquel les coordonnées x_{2n} et y_{2n} du point A_{2n} sont des valeurs approchées respectives des coordonnées x_0 et y_0 du point O, à 10^{-2}près.

Exercice académique n°3 : Résidus des nombres entiers

(À traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de voie générale)

Un nombre entier est écrit sur la première ligne d'un tableau triangulaire, un chiffre par case. Cette première ligne a donc autant de case que le nombre a de chiffres.

Par exemple pour **2018** la première ligne aura 4 cases comme l'indique le tableau ci-contre.

Le tableau est ensuite rempli ligne par ligne, chacune des cases devant contenir l'écart entre les deux chiffres situés au-dessus. Ainsi dans notre exemple,

l'écart entre 2 et 0 est **2**,

l'écart entre 0 et 1 est **1**,

l'écart entre 1 et 8 est **7**.

On obtient donc **217** sur la deuxième ligne :

2	**0**	**1**	**8**
2	**1**	**7**	

En continuant de la même façon, on obtient le tableau final ci-contre :

Le dernier chiffre obtenu dans le tableau est appelé **résidu**.
On dira donc que le résidu de **2018** est **5**. Ce qui se note : Rés (**2018**) = **5**.

2	**0**	**1**	**8**
2	**1**	**7**	
1	**6**		
5			

1. Déterminer à l'aide des tableaux suivants les résidus de 58, 752, 1492 et 1852.

5	**8**

7	**5**	**2**

1	**4**	**9**	**2**

1	**8**	**5**	**2**

2. Donner deux nombres différents permettant d'obtenir **351** sur la deuxième ligne :

3	**5**	**1**	

3	**5**	**1**	

3. Donner tous les entiers inférieurs à 100 dont le résidu vaut **5**.

4. Combien y a-t-il d'entiers strictement inférieurs à 100 dont le résidu vaut **0** ? Dont le résidu vaut **1** ?

5. Donner tous les entiers inférieurs à 1000 dont le résidu vaut **8**.

6. 9 est le seul entier inférieur à 10 dont le résidu vaut **9**.

- **a.** Combien y a-t-il d'entiers inférieurs à 100 dont le résidu vaut **9** ?
- **b.** Combien y a-t-il d'entiers inférieurs à 1000 dont le résidu vaut **9** ?
- **c.** Proposer une formule qui donne le nombre d'entiers inférieurs à 10^n (n entier naturel non nul) dont le résidu vaut **9**.
  On expliquera soigneusement la démarche ayant permis d'arriver à cette formule.
- **d.** Si on dressait la liste, dans l'ordre croissant, des 50 premiers entiers ayant pour résidu **9**, combien de chiffres aurait le dernier nombre de la liste ?

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

Olympiades nationales de mathématiques 2020

Académies de la Guadeloupe, de la Guyane et de la Martinique

Mercredi 11 mars de 8 h à 12h10

Pause de 10h à 10h10

Seconde Partie : Exercices nationaux de 10h10 à 12h10

A distribuer à 10h10

La résolution est individuelle

Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant 12h10.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. **Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition**.

Chaque partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices académiques et nationaux 1 et 2.

Les autres candidats doivent traiter les exercices académiques et nationaux 1 et 3.

Exercice national 1 : L'oiseau et le cerf-volant

<u>*(À traiter par tous les candidats)*</u>

1. **Réalisation de la figure**

   À partir du segment [AB] tracé sur la feuille annexe (dernière page) :

   - tracer le point C tel que dans le triangle ABC, l'angle en A vaut 30° et l'angle en B vaut 45° ;
   - tracer le point D, symétrique du point C par rapport au segment [AB] ;
   - noter H le point d'intersection des segments [AB] et [CD] ;
   - noter E le point d'intersection des droites (AC) et (BD) ;
   - noter F le point d'intersection des droites (AD) et (BC) ;
   - tracer le triangle AEF ;
   - à partir du point I milieu de [EF], tracer les segments [IC] et [ID] qui coupent respectivement les segments [BE] et [BF] en J et K.

   Le cerf-volant est le quadrilatère ACBD et l'oiseau est le polygone AEJIKF.

   On pose $\mathrm{AB} = 1$.

2. On cherche les dimensions du cerf-volant ACBD.

   a. Déterminer la nature des triangles ACD et BCD.

   b. Déterminer AH et CH en fonction de AC pour en déduire AC puis BC.

   c. En déduire l'aire S et le périmètre P de ce cerf-volant.

3. On cherche quelques dimensions de l'oiseau AEJIKF .

   a. Déterminer la nature des triangles AEF et BEF .

   b. Démontrer que $\mathrm{AE} = 1 + \sqrt{3}$; en déduire CE .

   c. Calculer BE .

4. On veut « décorer » le cerf-volant en dessinant son cercle inscrit noté $(\mathcal{E})$.

   On dit qu'un cercle est inscrit dans un polygone si ce cercle est tangent à tous les côtés de ce polygone.

   On admet la propriété suivante :

   Un quadrilatère MNPQ *possède un cercle inscrit si, et seulement si,* $\mathrm{MN} + \mathrm{PQ} = \mathrm{MQ} + \mathrm{NP}$.

   a. Pourquoi le cerf-volant ACBD possède-t-il un cercle inscrit ?

   On rappelle que S est l'aire du cerf-volant et P est son périmètre.

   b. Le rayon r du cercle inscrit $(\mathcal{E})$ est donné par $r = \frac{2\,S}{P}$. Calculer r.

   c. On admet que le centre G du cercle inscrit $(\mathcal{C})$ est sur le segment [AB]. Déterminer la distance AG.

   d. Placer le point P tel que B soit le milieu de [AP]. Puis calculer la distance CP.

   e. En déduire alors une construction du point G , centre du cercle $(\mathcal{E})$.

   f. Construire le cercle $(\mathcal{E})$.

5. On veut « décorer » l'oiseau en dessinant le cercle inscrit $(\mathcal{E}')$ du triangle BCE ainsi que son symétrique par rapport à la droite (AB).

   a. Déterminer l'aire S' et le périmètre P' du triangle BCE.

   b. Le rayon r' du cercle inscrit $(\mathcal{E}')$ du triangle BCE est $r' = \frac{2\,S'}{P'}$. Calculer r'

   c. Comment construire le centre du cercle $(\mathcal{E}')$ sans aucun calcul ?

6. Terminer le dessin en construisant le cercle $(\mathcal{E}')$ ainsi que son symétrique par rapport à la droite (AB).

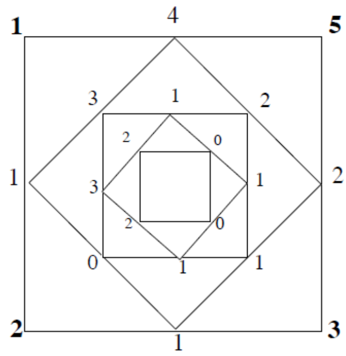
Exercice national 2 : Le jeu des 4 nombres

<u>*(À traiter par les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques)*</u>

Notation

Soit x un nombre réel, on rappelle que la *valeur absolue* de x, notée $|x|$, est définie de la façon suivante :
$|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x < 0$.
Par exemple, $|2| = 2$, $|-3| = 3$, $|2-3| = |-1| = 1$

Introduction



On choisit quatre nombres entiers naturels, par exemple 1, 5, 3 et 2. On place ces nombres sur les sommets d'un carré en suivant le sens des aiguilles d'une montre. Au milieu de chaque côté, on inscrit la valeur absolue de la différence des nombres placés aux extrémités de ce côté. Cette opération engendre une nouvelle liste de quatre entiers naturels, placés aux quatre sommets d'un nouveau carré plus petit. On répète ensuite cette opération.

On a représenté ci-contre les quatre premières étapes.

Si on note $Q^{(0)} = (a, b, c, d)$ le quadruplet d'entiers initial, le quadruplet obtenu après une opération est appelé *quadruplet dérivé* et est noté $Q^{(1)}$. Le quadruplet dérivé de $Q^{(1)}$ est noté $Q^{(2)}$, le quadruplet dérivé de $Q^{(2)}$ sera noté $Q^{(3)}$, etc.

Dans l'exemple ci-dessus, on a $Q^{(0)} = (1, 5, 3, 2)$; $Q^{(1)} = (4, 2, 1, 1)$; $Q^{(2)} = (2, 1, 0, 3)$;
$Q^{(3)} = (1, 1, 3, 1)$; $Q^{(4)} = (0, 2, 2, 0)$; $Q^{(5)} = (2, 0, 2, 0)$; $Q^{(6)} = (2, 2, 2, 2)$; $Q^{(7)} = (0, 0, 0, 0)$.

Première partie

1. Déterminer les quadruplets successifs obtenus en partant de $Q^{(0)} = (2, 5, 9, 16)$ et $Q^{(0)} = (1, 2, 2, 5)$

2. Déterminer un quadruplet de nombres entiers tel que l'on obtienne quatre zéros au bout de
a. 1 étape **b.** 2 étapes **c.** 3 étapes **d)** 8 étapes
Dans ces exemples on obtient 4 zéros au bout d'un nombre fini d'étapes.
On admet dans cette partie que c'est effectivement le cas quel que soit le quadruplet initial choisi ; la démonstration de ce résultat fera l'objet de la seconde partie.

3. On considère $Q^{(0)} = (a, b, c, d)$. Déterminer une expression de $Q^{(1)}$ en fonction de a, b, c, d .

4. Démontrer qu'il n'existe pas de quadruplet $Q^{(0)}$ de quatre entiers dont (1, 8, 21, 45) soit le dérivé.

5. On appelle *temps de vol* du quadruplet $Q^{(0)} = (a, b, c, d)$ le nombre d'étapes nécessaires pour atteindre quatre zéros. Par exemple, le temps de vol de $(1, 5, 3, 2)$ est égal à 7.
Rédiger un algorithme qui réalise les tâches suivantes :
- obtention du temps de vol d'un quadruplet (a, b, c, d) de 4 entiers compris entre 0 et 99
- obtention d'un quadruplet possédant ce temps de vol.

Seconde partie

On démontre dans cette partie que pour tout quadruplet d'entiers naturels on obtient quatre zéros en un nombre fini d'étapes.

1. Soit (a, b, c, d) un quadruplet d'entiers naturels.

a. Démontrer que si $Q^{(i)} = (a, b, c, d)$, alors l'un au moins des quadruplets $Q^{(i)}$, $Q^{(i+1)}$, $Q^{(i+2)}$, $Q^{(i+3)}$ ou $Q^{(i+4)}$ est composé de quatre entiers pairs.

b. Démontrer que si le quadruplet $Q^{(0)} = (a, b, c, d)$ admet comme temps de vol l'entier i, alors il en est de même du quadruplet $(2a, 2b, 2c, 2d)$.

2. Pour tout quadruplet $Q = (a, b, c, d)$ d'entiers naturels, on note $\max Q$ le plus grand des entiers a, b, c, d .

a. Démontrer que pour tout entier naturel i, on a : $\max\ Q^{(i+1)} \leq \max\ Q^{(i)}$

b. Est-il vrai que pour tout entier naturel i tel que $Q^{(i)} \neq (0, 0, 0, 0)$, on a : $\max\ Q^{(i+1)} < \max\ Q^{(i)}$?

c. Déduire des questions précédentes que, pour tout quadruplet $Q^{(0)} = (a, b, c, d)$ d'entiers naturels, il existe un entier i tel que $Q^{(i)} = (0, 0, 0, 0)$. *Pour répondre à cette question, on pourra utiliser le fait qu'il n'existe pas de suite infinie d'entiers naturels strictement décroissante.*

Troisième partie

1. On s'intéresse aux cas où l'on part d'un quadruplet de nombres non nécessairement entiers. Déterminer les quadruplets successifs en partant de $Q^{(0)} = (0, 1, 6, \pi)$.

2. On admet l'existence d'un réel de $]1; 2[$ noté q tel que $q^3 - q^2 - q - 1 = 0$. Montrer qu'en partant de $Q^{(0)} = (1, q, q^2, q^3)$ on n'obtient pas quatre zéros en un nombre fini d'étapes. Que peut-on cependant remarquer ?

Exercice national 3 : Les nombres palindromes

(À traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de voie générale)

Un nombre palindrome est un entier naturel non nul qui peut se lire de la même manière de gauche à droite ou de droite à gauche comme par exemple 78987 ou encore 123321.

Partie A : Généralités

1.

a. Combien existe-t-il de nombres palindromes à 2 chiffres ? Justifier.

b. Combien existe-t-il de nombres palindromes à 3 chiffres ? Justifier.

c. Déterminer le nombre de nombres palindromes à 241 chiffres.

2.

a. Donner deux nombres palindromes à 11 chiffres comportant chacun au moins deux chiffres différents.

b. Donner deux nombres palindromes à 12 chiffres comportant chacun au moins deux chiffres différents.

3. Pour tout réel x, on note $E(x)$ sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand entier m tel que $m \leq x$.
On admet que pour entier naturel $n < 10000$, écrit $n = 1000a + 100b + 10c + d$ (écriture décimale où a, b, c, d sont des entiers compris entre 0 et 9) :

- le chiffre des milliers de n est $a = E(n/1000)$;
- le chiffre des centaines de n est $b = E((n - 1000a)/100)$;
- le chiffre des dizaines de n est $c = E((n - 1000a - 100b)/10)$;
- le chiffre des unités de n est $d = n - 1000a - 100b - 10c$.

En utilisant la fonction partie entière, donner un algorithme permettant de déterminer si un entier à 4 chiffres est un palindrome (on pourra utiliser la fonction partie entière).

a. On rappelle que l'écart entre deux nombres réels x et y, quand $x < y$, est le réel positif $y - x$. Donner l'écart entre les nombres proposés en 2a)

b. Donner un exemple de deux nombres palindromes distincts à 4 chiffres, d'écart 11.

c. Démontrer que 11 est l'écart minimal entre deux nombres palindromes distincts à 4 chiffres.

Partie B : Nombres palindromes et divisibilité par 11

Dans cette partie, on souhaite étudier et démontrer la propriété suivante.

Tout nombre palindrome ayant un nombre pair de chiffres est divisible par 11.

1.

a. Démontrer que le nombre palindrome 123321 s'écrit sous la forme
$a_0 \times 11 + a_1 \times 1001 + a_2 \times 100001$ où on déterminera les entiers naturels a_0, a_1 et a_2.

b. Montrer que 123321 est divisible par 11.

2. On définit $N_k = 1 + 10^{2k+1}$ où k est un nombre entier naturel.
On admet que pour tout réel x et pour tout entier naturel n non nul, on a

$$1 - x^n = (1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}).$$

a. Montrer que N_k est divisible par 11.

b. En déduire que si un entier naturel est un nombre palindrome ayant un nombre pair de chiffres, alors il est divisible par 11.

c. La réciproque de cette propriété est-elle vraie ?

Annexe à rendre avec la copie

Exercice national 1 : L'oiseau et le cerf-volant

(À traiter par tous les candidats)