Calculer

La pratique du calcul doit viser un double équilibre : d'une part entre automatisation et raisonnement, d'autre part entre une visée pragmatique (l'obtention d'un résultat) et un accès à la compréhension des objets mathématiques engagés dans le calcul (nombres, symboles, etc.). Par ailleurs, le développement des technologies informatiques a profondément modifié l'appréhension du calcul, tant au niveau des pratiques quotidiennes et sociales qu'à celui des pratiques scientifiques. D'une part, la plupart des algorithmes de calcul dont l'apprentissage occupait autrefois un temps important de la scolarité obligatoire sont aujourd'hui implémentés dans les calculatrices les plus simples, ce qui pose la question de la pertinence du maintien de leur enseignement, d'autre part la puissance de calcul des nouveaux outils modifie profondément l'économie du calcul et pose dans des termes renouvelés celle de la gestion des rapports entre le calcul et le raisonnement puisqu'elle favorise explorations, simulations et expérimentations préalables à la découverte de preuves.

Objectifs

Dans le prolongement du cycle 3, l'apprentissage du calcul au cycle 4 porte d'abord sur les nombres, dont le corpus s'élargit, puis, à travers l'introduction de l'algèbre, sur les symboles littéraux. La variété des objets mathématiques qu'il engage et des formes selon lesquelles il est pratiqué (calcul mental, calcul posé, calcul instrumenté, calcul exact, calcul approché), les liens qu'il permet d'établir avec les autres disciplines, les besoins sociaux, culturels et scientifiques auquel il doit répondre justifient la place essentielle accordée au calcul dans le programme du cycle 4.

Nous rappelons ci-dessous la description qui y est donnée de la compétence « calculer » :

> « Calculer avec des nombres rationnels, de manière exacte ou approchée, en combinant de façon appropriée le calcul mental, le calcul posé et le calcul instrumenté (calculatrice ou logiciel).
>
> Contrôler la vraisemblance de ses résultats, notamment en estimant des ordres de grandeur ou en utilisant des encadrements.
>
> Calculer en utilisant le langage algébrique (lettres, symboles, etc.) »

Cette description met en avant d'une part le lien entre calcul et raisonnement et d'autre part celui entre calcul mental, calcul à la main et calcul instrumenté.

L'objectif prioritaire de l'enseignement des mathématiques au cycle 4 est de faire faire des mathématiques aux élèves. Or « faire des mathématiques », c'est « résoudre des problèmes ». Pour autant, un élève ne peut pas résoudre de problème s'il ne maîtrise pas un minimum de technique. En effet, sans ce minimum, toute mise en œuvre d'une stratégie de résolution risque de se révéler particulièrement laborieuse, voire impossible à finaliser, ce qui est particulièrement démotivant pour l'élève. C'est la raison pour laquelle le programme du cycle 4 vise à renforcer et à élargir la maîtrise calculatoire des élèves. Cependant, cela ne doit pas se faire au détriment des activités de résolution de problèmes, qui constituent d'ailleurs un puissant levier pour motiver l'acquisition des techniques de calcul. En particulier, il est indispensable de ne pas limiter l'activité des élèves les plus fragiles à des tâches purement techniques et il est déconseillé d'attendre systématiquement leur maîtrise avant de leur proposer de résoudre des problèmes.

Il est donc important que les activités mettant en jeu des calculs respectent un juste équilibre entre entraînement technique et résolution de problèmes et les mettent en synergie afin de construire progressivement et de façon différenciée l'habileté calculatoire qui permettra à chaque élève de poursuivre ses études avec confiance et succès.

Outre l'acquisition de techniques efficaces et le développement d'automatismes indispensables à la réalisation autonome d'une activité mathématique, l'apprentissage du calcul au cycle 4 vise :

- la familiarisation avec les nombres (notamment leurs différents registres de représentation) et les opérations, mais aussi la découverte de nouveaux nombres (les relatifs) et de nouveaux objets mathématiques engagés dans les calculs (les lettres) ;
- le développement de stratégies de vérification et de contrôle permettant de développer l'esprit critique et de favoriser une utilisation raisonnée des instruments de calcul.

Calcul automatisé et calcul réfléchi

Pour illustrer les liens entre automatisation de procédures de calcul et réflexion engagée pour mener à bien un calcul, nous nous appuierons sur deux exemples :

Premier exemple : un élève qui, ayant à calculer 29×21 le décompose en $29 \times 20 + 29$ est capable d'obtenir le résultat mentalement plus vite et plus sûrement qu'en posant la multiplication. De plus, il mobilise implicitement une propriété essentielle de la multiplication (sa distributivité par rapport à l'addition) qu'il pourra ensuite généraliser. Des raisonnements de ce type (comme d'autres sur les fractions ou les puissances) s'avèrent d'ailleurs nécessaires pour pallier d'éventuels oublis.

Deuxième exemple : un élève qui maîtrise la technique opératoire de l'addition sait qu'il peut l'utiliser pour calculer 998 + 1205. Son calcul est alors automatisé ; mais, considérant les nombres en jeu, il peut trouver plus rapide de raisonner sur ce calcul et se dire que, vu que 998 = 1000 - 2, il lui suffit d'ajouter 1000 et d'enlever 2 au second nombre, pour obtenir le résultat 2203. C'est ici l'associativité qui est mise en jeu.

Seuls les répertoires (au sens de connaissances organisées et hiérarchisées) dont on dispose et les algorithmes que l'on maîtrise permettent l'automatisation d'un calcul. Ce sont eux qui en font la force et en garantissent l'efficacité. Mais dès lors qu'il sort de la routine, le calcul engage nécessairement un raisonnement. Il est essentiel d'insister sur ce point et sur la nécessité de cultiver cette synergie entre automatisation et raisonnement dans l'apprentissage de tout calcul. En particulier, le travail de mémorisation des règles de calcul sur les nombres doit fournir l'occasion d'exercer le raisonnement et de travailler les propriétés des nombres et des opérations qui le fondent. Il est également important d'insister sur le fait que les répertoires enseignés ne sauraient se limiter à des répertoires de composition, comme on comprend malheureusement souvent l'apprentissage des tables d'addition ou de multiplication. Les résultats de la décomposition de nombres (en somme ou en produit) sont aussi importants que ceux de leur composition et, si l'égalité $9 \times 7 = 63$ n'est pas associée à $63 = 9 \times 7$; $9 = 63 \div 7$ et $7 = 63 \div 9$, elle sera d'une utilité bien moindre.

Parmi les automatismes à développer, on peut citer (mais la liste est loin d'être exhaustive) les changements de registre d'écriture (décimale, fractionnaire), l'application d'un opérateur fractionnaire (par exemple prendre les sept tiers de 12), d'un pourcentage, la transformation d'une fraction en pourcentage et vice versa, la multiplication et la division par 10, 100, 1000, 10 000, les conversions d'unités de longueur, d'aire, de volume, de durée, les produits et quotients de puissances de 10, le développement et la simplification d'expressions littérales.

Ces réflexes intellectuels s'acquièrent dans la durée sous la conduite du professeur. Ils se développent en mémorisant et en automatisant progressivement certaines procédures, certains raisonnements particulièrement utiles, fréquemment rencontrés et ayant valeur de méthode. Pour être disponibles, les automatismes doivent avoir été entretenus et régulièrement sollicités.

Toutefois un automatisme n'est pas un moyen pour comprendre plus vite ; il permet simplement d'aller plus vite une fois que l'on a compris. Si l'acquisition d'automatismes nécessite des exercices d'entraînement et de mémorisation, référés à des tâches simples, ces exercices ne sauraient suffire : l'entraînement et la mémorisation ne constituent pas une fin en soi et sont mis au service de la résolution de problèmes plus complexes dans lesquels ils prennent tout leur sens.

Progressivité des apprentissages

Les compétences de calcul numérique travaillées au cycle 3 sont à consolider tout au long du cycle 4. Elles portent sur les nombres entiers et décimaux positifs et les quatre opérations, et concernent aussi bien le calcul automatisé que réfléchi, effectué sous forme exacte ou approchée.

La pratique du calcul commence souvent sur des objets en cours de construction (par exemple, le calcul fractionnaire en 6^{e} ou celui sur les nombres négatifs en 5^{e}). Le rôle du calcul est alors décisif pour familiariser les élèves avec ces objets, leur manipulation étant un moyen d'en construire une représentation efficace. C'est particulièrement vrai lorsque la définition de ces objets n'est pas étudiée, parce qu'inaccessible aux élèves, comme dans le cas de la construction des ensembles de nombres. Le calcul permet alors de mettre en place de façon progressive et implicite les structures qui les régissent.

Pour effectuer des calculs semblables à ceux qui ont été présentés *supra* en lien avec l'associativité et la distributivité, le recours à la calculatrice, s'il permet d'obtenir les résultats, prive l'élève d'une familiarisation avec les propriétés des nombres et des opérations Les modalités d'utilisation de la calculatrice supposent donc une véritable réflexion de la part des enseignants. Un paragraphe de ce document est entièrement dédié au calcul instrumenté.

Concernant le calcul fractionnaire, les élèves ont appris au cycle 3 à additionner, soustraire et comparer des fractions de même dénominateur, en référence à la notion de partage. L'oral a pu jouer un rôle déterminant dans l'automatisation de procédures telles que « 3 septièmes + 5 septièmes = 8 septièmes ». La poursuite, au cycle 4, de l'apprentissage des fractions vise à les appréhender en tant que quotients. Cette notion est sollicitée pour institutionnaliser la technique de l'addition de deux fractions de même dénominateur à partir d'un exemple générique, pour effectuer le produit de fractions simples, comme par exemple $\frac{2}{3} \times \frac{7}{5}$ ou pour rechercher l'inverse d'une fraction simple. Ce travail est un préalable indispensable à la bonne compréhension des calculs de portée générale sur des fractions dont les numérateurs et dénominateurs sont des entiers relatifs.

Une bonne connaissance des fractions est une aide précieuse pour traiter les problèmes de proportionnalité. La détermination d'une quatrième proportionnelle peut reposer sur le cœfficient de proportionnalité, des propriétés en lien avec la linéarité ou le produit en croix.

Le calcul algébrique constitue un nouvel espace où va se déployer le raisonnement, en permettant notamment de démontrer en toute généralité des résultats constatés sur des exemples numériques (par exemple les propriétés du calcul fractionnaire). Pour préparer l'introduction du calcul littéral, il importe, dès le début du cycle 4, de renforcer le sens déjà connu du signe « égal » (par exemple dans l'égalité $\frac{3}{4} = 0{,}75$). Il va en effet être élargi à la fois à celui qu'il revêt dans une identité et dans une équation.

La notion d'identité correspond implicitement à la quantification universelle « pour tout », alors que celle d'équation correspond implicitement à une quantification existentielle (« existe-t-il une valeur de la variable pour laquelle deux formules donnent le même résultat ? »).

En fin de cycle 4, l'élève doit être capable de distinguer une identité du type $3(x+2)=3x+6$, valable pour tout x, d'une équation du type $3(x+2)=x+7$.

Une explicitation de « l'environnement » de l'égalité (ne pas hésiter à écrire « l'égalité … est vraie pour tout x » ou « existe-t-il une valeur de x pour laquelle l'égalité …est vraie ? ») est certainement le meilleur levier pour faire comprendre aux élèves ces notions délicates.

Le travail sur le développement et la réduction d'expressions littérales (dans lesquelles on peut, au début, se passer des nombres négatifs) est mené de front avec la consolidation de la maîtrise du calcul sur les nombres relatifs, entiers ou décimaux.

Stratégies d'enseignement

Enseigner les stratégies calculatoires par petites touches

Un enseignement fréquent et régulier permet de donner à chaque élève la possibilité de s'approprier à son rythme les stratégies de calcul. Ainsi est-il plus efficace et moins rébarbatif pour un élève, d'être sollicité de manière régulière à partir de la classe de 4^{e}, sur un petit nombre d'exercices de développement ou de réduction d'expressions littérales (ou de calcul fractionnaire dès la 5^{e}), plutôt que d'y être confronté à haute dose sur un petit nombre de séances.

Pratiquer des activités de calcul mental

Ce que nous appelons « calcul mental » dépasse le cadre du calcul mental traditionnel, puisque nous y englobons le calcul mental faisant appel au raisonnement, qu'il soit numérique ou littéral. Le calcul mental est intéressant en soi, d'abord parce qu'il permet d'acquérir des procédures de calcul utiles pour la vie quotidienne et d'automatiser des savoir-faire qui, une fois disponibles, libèrent la pensée pour d'autres tâches plus complexes. L'entraînement au calcul mental porte sur les techniques opératoires s'appliquant aux nombres relatifs (entiers et décimaux) et aux fractions, mais aussi sur le calcul littéral. Il favorise l'appropriation des nombres et de leurs propriétés et permet d'enrichir leur appréhension dans différents registres.

Ainsi, 25 %, c'est à la fois un quart, la fraction $\frac{1}{4}$ et le décimal 0,25 ; cet automatisme permet par exemple le calcul immédiat de $24 \times 0{,}25$.

De bonnes compétences en calcul mental sont indispensables pour prévoir l'ordre de grandeur d'un résultat, pour permettre une utilisation raisonnée de la calculatrice, pour développer l'esprit critique face à un résultat obtenu autrement.

Le calcul mental aide à la résolution de problèmes, il permet d'expérimenter, de prendre des initiatives, de développer des stratégies à partir d'essais et de tâtonnements, de développer aisance et rapidité dans la gestion de calculs plus complexes. Le calcul mental réfléchi (par exemple le calcul de 998 + 1205 présenté *supra*) est quant à lui le support à de véritables raisonnements.

La pratique régulière du calcul mental favorise la progressivité des apprentissages. Avant la formalisation d'un nouveau savoir, elle permet d'anticiper, de préparer son étude. Pendant la phase d'apprentissage, elle facilite l'appropriation des notions ou des propriétés travaillées. Après l'apprentissage, grâce à un réinvestissement régulier, elle permet l'appropriation pérenne des savoirs et développe la capacité à les mobiliser dans des situations inédites.

Le calcul mental fournit des supports d'évaluation pertinents : c'est une modalité efficace d'évaluation diagnostique. Sur le plan formatif, les temps de mise en commun permettent à la fois de dédramatiser l'erreur et de faciliter le débat participatif et argumenté. Les élèves qui réussissent en calcul mental n'étant pas toujours exactement les mêmes que ceux qui réussissent dans d'autres activités mathématiques, il importe de reconnaître leurs réussites en prévoyant des situations d'évaluation sommative de calcul mental. Les activités mentales régulières, allant jusqu'à être ritualisées, facilitent la gestion de classe. Elles sont souvent des moments d'intense activité de la part de l'élève, car motivantes et stimulant l'attention.

Utiliser un exemple générique

En parallèle des écritures littérales, le recours à un exemple générique peut permettre de faire comprendre une démonstration à des élèves qui pourraient être déroutés par une approche purement formelle.

Ainsi, dans l'exemple suivant qui détaille le cas du produit de deux quotients, les calculs numériques menés dans la colonne de gauche peuvent être présentés plutôt que ceux de la colonne de droite, à condition toutefois que le résultat soit énoncé dans sa généralité.

	a, b, c et *d* sont quatre nombres quelconques ; *b* et *d* sont différents de zéro.
$\frac{2}{7}$ est le nombre par lequel il faut multiplier 7 pour obtenir 2 donc $7\times\frac{2}{7}=2$. De même $3\times\frac{5}{3}=5$	$\frac{a}{b}$ est le nombre par lequel il faut multiplier *b* pour obtenir adonc $b\times\frac{a}{b}=a$. De même $d\times\frac{c}{d}=c$
Si on multiplie $\frac{2}{7}\times\frac{5}{3}$ par 7×3, on obtient en changeant l'ordre des facteurs dans le produit : $7\times\frac{2}{7}\times3\times\frac{5}{3}$ soit, d'après ce qui précède : 2×5	Si on multiplie $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ par $b\times d$, on obtient en changeant l'ordre des facteurs dans le produit : $b\times\frac{a}{b}\times d\times\frac{c}{d}$ soit, d'après ce qui précède : $a\times c$.
On en déduit donc que $\frac{2}{7}\times\frac{5}{3}$ est le nombre par lequel il faut multiplier 7×3 pour obtenir 2×5.	On en déduit donc que $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ est le nombre par lequel il faut multiplier $b\times d$ pour obtenir $a\times c$.
Donc $\frac{2}{7}\times\frac{5}{3}=\frac{2\times5}{7\times3}$.	Donc $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$.

Anticiper et expliciter

Dès le début du cycle, le recours à une démarche par essais et ajustements et l'utilisation d'un tableur pour tester des valeurs permettent d'introduire progressivement la notion de solution d'une équation. Les limites des méthodes par tâtonnement ou par « remontée » des programmes de calcul permettent de justifier l'étude des techniques algébriques de résolution des équations du premier degré.

La part de raisonnement intrinsèque au calcul, lorsqu'il ne se réduit pas à un geste mécanique, mérite d'être explicitée dans l'enseignement. Il importe par exemple d'apprendre aux élèves à anticiper la forme la plus pertinente sous laquelle il faut écrire un nombre (écriture décimale ou fractionnaire, décomposition en somme ou en produit, etc.) ou une expression selon l'usage que l'on veut en faire. Il revient au professeur de prendre en charge le développement de cette intelligence du calcul chez ses élèves, par des moyens qui sont en partie communs et en partie propres à chaque type de calcul. Parmi les moyens communs, signalons l'organisation des différentes étapes d'un calcul complexe, le choix des transformations à effectuer pour le simplifier, le contrôle (au moyen d'ordres de grandeur, de considérations de signe ou d'encadrement).

Trouver la juste place du calcul instrumenté

S'agissant de la calculatrice, du tableur ou de logiciels, la pertinence du calcul instrumenté dépend de l'usage que l'on en fait.

Le calcul instrumenté peut être néfaste aux apprentissages lorsque son usage est mal pensé, trop précoce ou exclusif. D'une part, les premiers pas dans l'apprentissage d'une notion calculatoire requièrent souvent une pratique dans laquelle la gestion mentale ou écrite est une aide à sa compréhension. Le recours systématique à la machine peut alors constituer un réel obstacle. D'autre part, l'apprentissage du calcul ne saurait se limiter à la production de résultats. Il comporte aussi tout un travail autour de la réflexion stratégique qu'il engage sur la recherche du calcul le plus approprié, son organisation et son contrôle à travers des allers retours permanents entre le résultat (même lorsqu'il a été obtenu à l'aide d'un instrument) et son interprétation.

Le calcul instrumenté facilite la résolution de problèmes, en permettant notamment aux élèves d'accéder à des sujets motivants sans être bloqués par des difficultés calculatoires. La possibilité d'utiliser des outils numériques (calculatrice, logiciels, etc.) a déplacé les équilibres entre exécution, pilotage et contrôle du calcul, ce qui permet de mettre aujourd'hui l'accent sur les aspects liés à l'intelligence du calcul. Encore faut-il intégrer la technologie de façon adéquate dans l'enseignement, en construisant des situations où pilotage et contrôle sont nécessaires.

Par sa rapidité à effectuer des calculs complexes et les possibilités d'accès à un grand nombre de données, le calcul instrumenté facilite aussi l'émission de conjectures dans des situations variées (résolution d'équations, comportement d'une fonction). Par ailleurs, il permet des changements de registres (numérique, symbolique, graphique) précieux pour l'assimilation.

Le recours au calcul instrumenté n'est pas dépourvu de raisonnement. Ainsi l'exécution d'un calcul sur machine requiert une organisation réfléchie (assimilation des priorités de calcul, conception d'un algorithme).

Son bon usage réside donc souvent dans une utilisation hybride, combinée avec des calculs mentaux ou réalisés à la main, notamment dans la résolution de problèmes.

Différenciation pédagogique

Le calcul mental favorise la différenciation pédagogique par la possibilité qu'il offre de faire vivre différentes procédures, d'accepter différentes réponses plus ou moins abouties. En évitant le passage systématique à l'écrit, il favorise l'entrée de certains élèves dans les apprentissages mathématiques ; il permet à chacun d'eux de développer et d'optimiser le champ de ses procédures, et au professeur de varier les consignes (résultats intermédiaires autorisés pour certains, avec l'objectif de s'en libérer petit à petit, temps variable accordé aux réponses, consignes écrites et/ou orales, forme des énoncés, etc.).

L'instrumentation du calcul a, elle aussi, un rôle à jouer au niveau de la différenciation pédagogique. En effet, pour certains élèves, un manque d'assurance dans le calcul écrit constitue un véritable handicap et une source de blocage. Or, de même qu'une orthographe incertaine ne saurait interdire l'écriture, le manque de dextérité calculatoire ne doit pas constituer un blocage à toute activité mathématique. Dans ces conditions, y compris dans des cas que l'on souhaiterait voir maîtrisés sans recours à la machine, un calcul assisté peut permettre à certains élèves de s'engager dans une activité mathématique présentant un réel enjeu en termes de modélisation ou de raisonnement et d'entrer dans des apprentissages qui leur seraient inaccessibles sans cette assistance.

Afin de faire face à l'hétérogénéité des élèves en termes de maîtrise calculatoire, la différenciation peut porter sur les nombres engagés dans un problème si l'on veut mettre l'accent sur sa mise en équation ou sa résolution plutôt que sur les techniques opératoires portant sur ces nombres. Par exemple, proposer à certains élèves des agrandissements dans lesquels « le côté qui mesure 8 cm devra mesurer 16 cm », à d'autres « le côté qui mesure 8 cm devra mesurer 12 cm », à d'autres encore « le côté qui mesure 7 cm devra mesurer 12 cm », permet d'adapter la situation à différents niveaux de maîtrise de la notion de quotient sans nuire à l'objectif de formation s'il est de faire comprendre le caractère multiplicatif de la situation. De même, pour faire comprendre la notion de solution d'une équation, avant d'automatiser la méthode algébrique de résolution d'une équation du premier degré, on pourra traiter des équations à coefficients entiers dont la solution peut être « devinée » sans peine, avant de passer à des équations dont la solution peut être trouvée ou approchée à l'aide d'un tableur.

Interdisciplinarité

Si le calcul est omniprésent dans l'apprentissage des mathématiques, il est également au cœur des interactions avec d'autres disciplines.

Le calcul numérique sur les mesures de grandeurs se prête à des interactions avec de nombreuses disciplines (physique, chimie, sciences de la vie et de la Terre, technologie, EPS, etc.). Le calcul littéral est particulièrement sollicité à travers l'exploitation des formules qui traduisent les lois physiques ($P = UI$, $P = mg$, relation liant l'énergie, la puissance électrique et la durée) au programme de physique-chimie du cycle 4. Le calcul lié à la proportionnalité et aux statistiques permet d'élargir ces interactions à une discipline comme la géographie et les nombres négatifs permettent de repérer des températures, des profondeurs, des dates, des créances, autant de notions qui dépassent le cadre de la seule discipline mathématique.