Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE
MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Olympiades académiques de mathématiques 2019

Académies de Guadeloupe, Guyane et Martinique
AEFE zones des Amériques

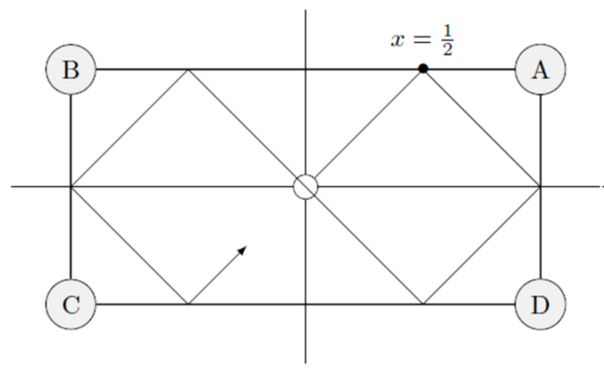
CORRIGE

Exercice académique numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

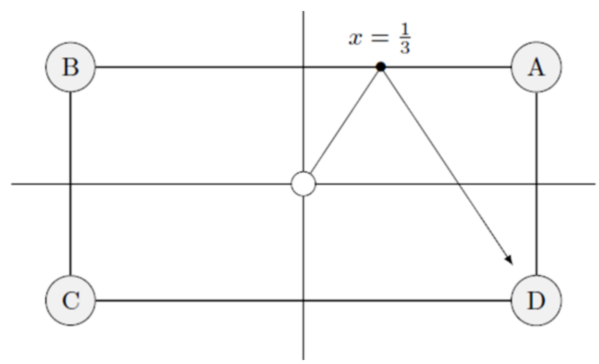
Le Billard

Quelques cas simples

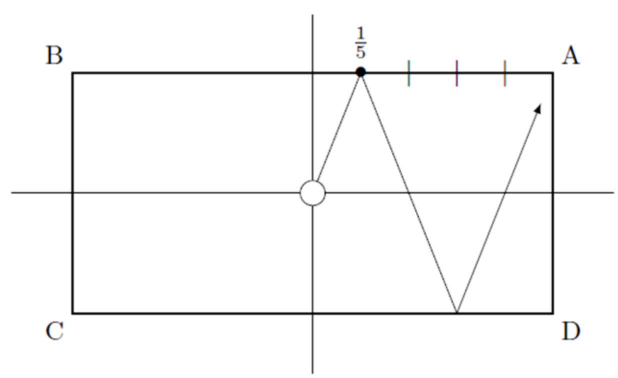
1. Par la loi de Descartes, le prochain rebond de la boule après $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ sur [BA] a lieu au milieu de [AD] en (1 ; 0), puis sur [CD] en $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$, puis $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, (− 1 ; 0) (milieu de [BC]), et $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$. Après ce dernier rebond, la balle va repasser en (0 ; 0) et poursuivre suivant la même trajectoire que précédemment : **elle ne sera jamais empochée !**



2. Toujours par loi de Descartes, après le premier rebond sur [BA] en $=\frac{1}{3}$, la balle retraverse l'axe des abscisses en $\left(\frac{2}{3};0\right)$, et finit sa course en $\left(1;-\frac{1}{2}\right)$, c'est-à-dire au trou D. La boule est donc empochée en une bande.



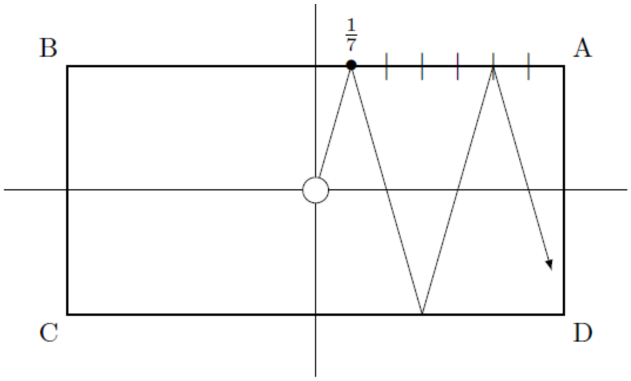
3. En réduisant la visée à $\frac{1}{4}$, on constate qu'on a retouvé une trajectoire cyclique, comme à la question 1., où la boule n'est jamais empochée. Par contre, avec $=\frac{1}{5}$, la boule est empochée en deux bandes au trou A :

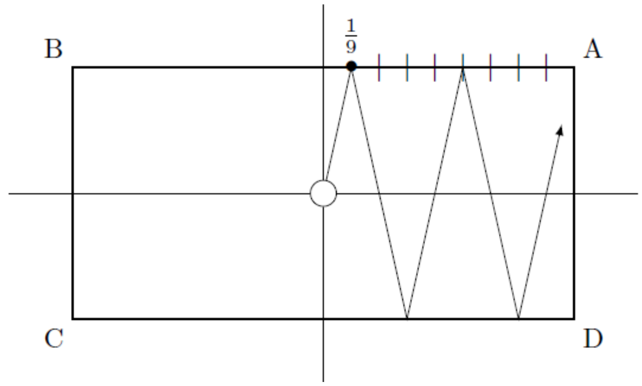


4. Pour rentrer la boule en 3 bandes suivant le même type de trajectoire que précédemment, il faut encore réduire la visée, et, après $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{5}$, on a bien envie de tester $\frac{1}{7}$. De façon générale, on peut conjecturer que toutes les visées de la forme $\frac{1}{m}$ avec m impair, permettent d'empocher la boule en A ou en D, tandis qu'avec m pair, on aurait une trajectoire cyclique ne conduisant jamais à un trou. De façon plus précise, on va conjecturer qu'on peut empocher la boules en n bandes avec une visée $x = \frac{1}{2n+1}$ au trou :

A si n est pair et D si n est impair

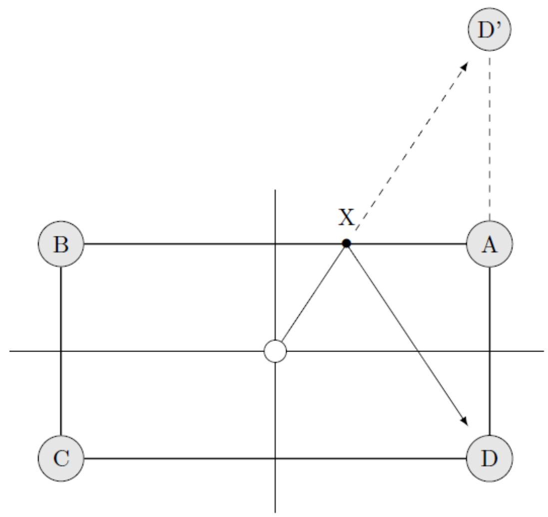
Voici l'illustration de cette proposition avec $= 3$, puis $n = 4$:



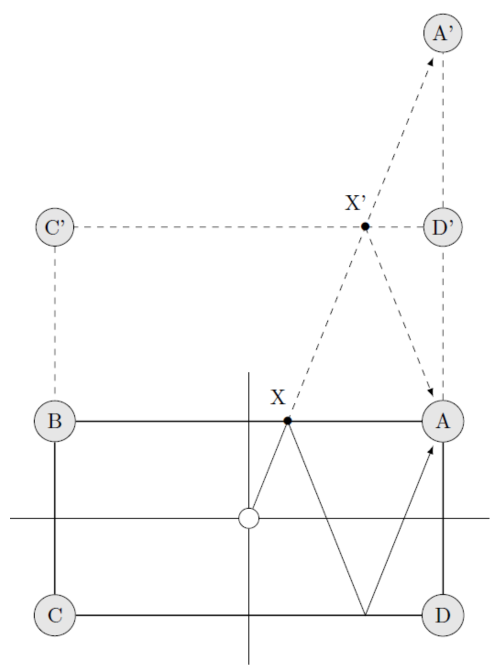


Utilisation des trous « virtuels »

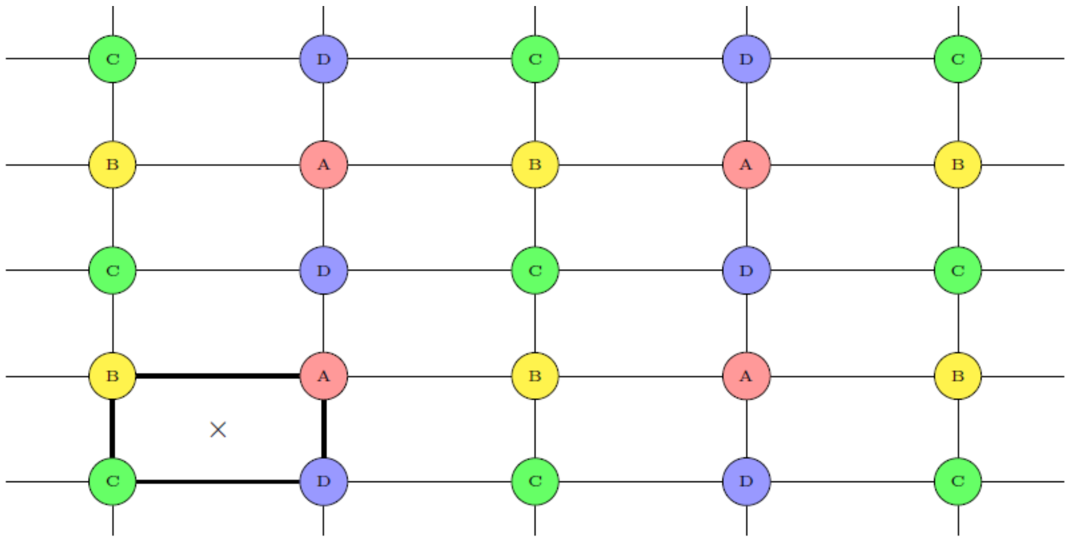
5. Notons O l'origine, et considérons le segment [OD']. Il intersecte le segment [BA] en X, lieu du premier rebond de la boule si on vise D'. La loi de Descartes et l'égalité des angles opposés au sommet X pour les droites (OD') et (BA) prouve qu'après le rebond en X, la boule parcourt l'image du segment [XD'] par la symétrie orthogonale d'axe (BA), c'est-à-dire le segment [XD]. La boule atteint donc le trou D en une bade si on vise D' (ou, ce qui revient au même, X) :



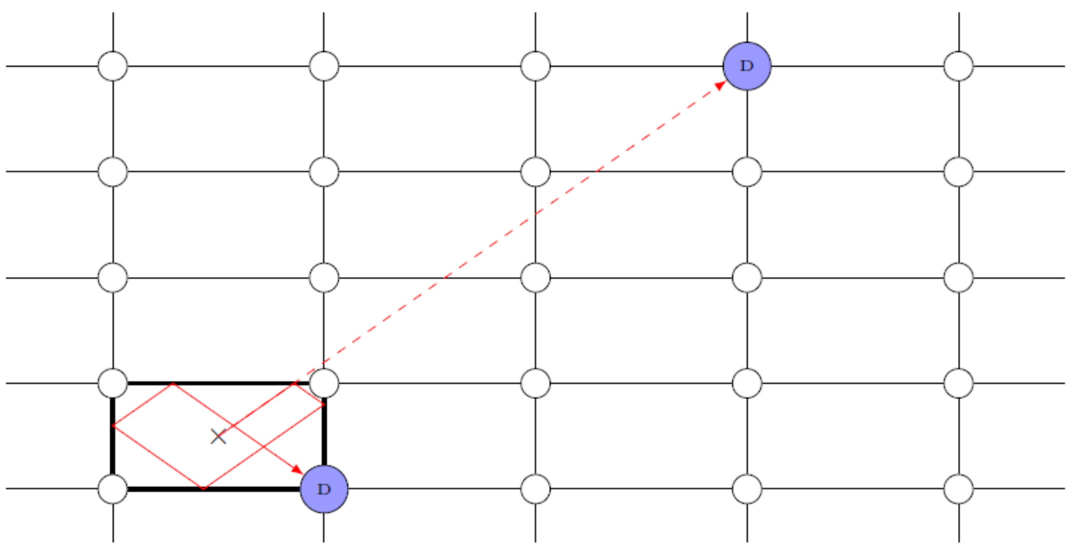
6. Reprenons la définition précédente de D'. On considère également l'image C' de D par la symétrie orthogonale d'axe (AB). La bande « virtuelle » [C'D'] est l'image de la bande réelle [CD], et viser dessus, revient à chercher un rebond sur [CD] postérieur à un rebond sur [AB]. On peut alors atteindre A en deux bandes en visant le point A', symétrique orthogonal de A par rapport à la droite (C'D'). En effet, en notant respectivement X et X' les points d'intersection de (OA') avec (BA) et (C'D'), atteindre A en deux bandes revient par symétrie à atteindre A via un seul rebond virtuel en X' sur [C'D'], ce qui revient à atteindre A' en un seul rebond (cf schéma ci-contre). Le point A' ayant pour coordonnées $\left(1\,;\,\frac{5}{2}\right)$, la droite (OA') a pour équation $y = \frac{5}{2}x$, et intersecte (BA) au point X d'ordonnée $y = \frac{1}{2}$, et donc d'abscisse $x = \frac{1}{5}$. On retrouve la visée obtenue à la question 3.



7. On effectue des symétries orthogonales par rapport aux bandes du billard, et on recommence successivement avec les bandes virtuelles obtenues :



8. En visant sur la partie droite de la bande supérieure, on voit facilement les différentes versions virtuelles du trou D que l'on peut atteindre. Une seule correspond à 5 bandes dont 4 différentes, et elle est située au point de coordonnées $\left(5\,;\frac{7}{2}\right)$. Raisonnons comme à la question précédente : la droite reliant l'origine O à ce trou D virtuel a pour équation $= \frac{7}{10}\,x$, et intersecte donc la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ au point d'abscisse $x = \frac{5}{7}$, la visée cherchée.



Exercice académique numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Une histoire de cubes

1. L'artiste dispose d'un volume total de $2m^3$ de plastique malléable, donc le volume v_n ne doit pas dépasser 2. Résoudre le problème 1 ramène à répondre à la question « A-t-on $v_n \leq 2$ » ?

Il dispose d'une quantité de laque permettant de peindre une surface de 12 m^3. Résoudre le problème 2 ramène à répondre à la question : « A-t-on $s_n \leq 12$? »

Enfin, la salle du musée a une hauteur de plafond de 8m. La hauteur totale de l'empilement des cubes ne doit pas dépasser 8m. Le problème 3 ramène donc à répondre à la question « A-t-on $h_n \leq 8$? »

2. $v_{10} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{10^3}$ = 1,1975…< 2

$S_{10} = 6 \times \frac{1}{1^2} + 6 \times \frac{1}{2^2} + \cdots + 6 \times \frac{1}{10^2} = 6 \times \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{10^2}\right)$ = 9,2986… < 12

$h_{10} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{10}$ = 2,9289…< 8.

L'artiste peut réaliser une œuvre comprenant 10 cubes.

3. $v_{100} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{100^3}$ = 1,2020…< 2

$S_{100} = 6 \times \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{100^2}\right)$= 9,8099… < 12

$h_{10} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{100}$ = 5,1874…< 8.

L'artiste peut réaliser une œuvre comprenant 100 cubes.

4.a. $\forall\, k \geq 2, \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k(k-1)} = \frac{k-1-k}{k^2(k-1)} = -\frac{1}{k^2(k-1)}$. Or $k \geq 2$, donc $k^2(k-1) > 0$.

Ainsi $\forall\, k \geq 2, \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k(k-1)} < 0$, donc $\forall\, k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$

Et $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-k+1}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}$.

4.b. On ajoute membre à membre les inégalités précédentes pour k = 2,,.....,n.

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{2(2-1)} + \frac{1}{3(3-1)} + \frac{1}{4(4-1)} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)}$$
$$\leq \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

On a donc

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 1 - \frac{1}{n} \leq 1$$

4.c. On en déduit que $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2$ puis que $s_n \leq 12$.

Conclusion : il est possible de peindre tous les cubes de l'on veut.

5.a. $\forall k \geq 1$, $\frac{1}{k^3} - \frac{1}{k^2} = \frac{1-k}{k^3}$; $1 - k \leq 0$ et $k^3 > 0$

Ainsi $\forall k \geq 1$, $\frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^2}$

5.b. Ainsi $v_n \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{6}\, s_n \leq 2$.

5.c. Conclusion : Il est possible de réaliser le montage de tous les cubes que l'on veut.

6. a.

- $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{4+3-6}{12} = \frac{1}{12}$. Ainsi $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{12}$

- De même $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=$ $\frac{168+140+120+105-420}{840}=\frac{113}{840}$.

  Ainsi $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\geq\frac{1}{2}$.

- $\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots.+\frac{1}{2^{k+1}}$ est la somme de 2^k termes, dont le plus petit est le dernier. Cette somme est donc minorée par $2^k\times\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}$

6.b. Si $n = 2^k$, alors : $h_n = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)$

Chaque parenthèse est minorée par $\frac{1}{2}$, et il y en a k-1, donc : $h_n\geq 1+\frac{1}{2}+ \ (k-1)\times\frac{1}{2}$, c'est-à-dire :

$h_n\geq\frac{3}{2}+\frac{k-1}{2}$ ou encore : $h_n\geq 1+\frac{k}{2}$.

6.c D'après la question précédente, $h_n > 8$ dès que $\frac{k}{2}+1>8$ soit $k > 14$ et $n\geq 2^{14}$.

Donc on est sûr que $h_n > 8$ avec $n = 2^{15.}$

L'artiste ne peut donc pas empiler autant de cubes qu'il veut.

Exercice académique numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que S)
Un gros cube … des petits cubes

1. Un cube a 6 faces, 12 arêtes et 8 sommets.

2. En comptant directement sur les dessins ou en utilisant le raisonnement de la question suivante, on trouve le tableau suivant :

	a_n	b_n	c_n	d_n	$a_n + b_n + c_n + d_n$
$n = 2$	0	0	0	8	8
$n = 3$	1	6	12	8	27
$n = 4$	8	24	24	8	64
$n = 5$	27	54	36	8	125

3. Soit n entier naturel, $n \geq 2$. On remarque que les petits cubes n'ayant aucune face peinte forment un cube de taille $n - 2$ à l'intérieur du cube. On a donc :

$$a_n = (n - 2)^3.$$

Les petits cubes n'ayant qu'une seule face peinte sont situés au milieu de chaque face et forment des carrés de taille $n - 2$. Il suffit donc de multiplier par le nombre de faces :

$$b_n = 6(n - 2)^2.$$

Pour les petits cubes ayant deux faces peintes, ils sont situés sur les arêtes du gros cube ; il y en a $n - 2$ par arête, ainsi :

$$c_n = 12(n - 2).$$

Enfin, les petits cubes ayant trois faces peintes sont les cubes contenant les sommets du gros cube. On a donc :

$$d_n = 8.$$

4. On a deux méthodes pour cette question :

- soit on développe n^3 sous la forme $[(n - 2) + 2]^3$ en utilisant la formule

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

Et on trouve alors :

$n^3 = (n - 2)^3 + 3\times(n - 2)^2\times2 + 3\times(n - 2)\times4 + 8 = (n - 2)^3 + 6\times(n - 2)^2 + 12\times(n - 2) + 8 = a_n + b_n + c_n + d_n$.

- soit on part de $a_n + b_n + c_n + d_n$, mais il faut encore développer un cube. On a :

$a_n + b_n + c_n + d_n = (n - 2)^3 + 6\times(n - 2)^2 + 12\times(n - 2) + 8 = n^3 - 6n^2 + 12n - 8 + 6n^2 - 24n + 24 + 12n - 24 + 8 = n^3$.

Quelle que soit la méthode choisie, on trouve bien :

$$a_n + b_n + c_n + d_n = n^3.$$

5. Il s'agit de comparer a_n et $b_n + c_n + d_n = n^3 - a_n$. On rentre les valeurs dans un tableau en utilisant la calculatrice :

n	5	6	7	8	9	10
a_n	27	64	125	216	343	512
$n^3 - a_n$	98	152	218	296	386	488

Ainsi, il y a plus de petits cubes n'ayant aucune face peinte en gris que de petits cubes ayant au moins une face peinte à partir de $n = 10$.

Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)
Grands pairs …

Éléments de solution

1. Le nombre $384\,957$ est un *grand pair*, mais pas un *grand impair*, car 8 est supérieur à 3.

2. Il faut (et il suffit) que tout chiffre soit plus grand que son successeur et plus petit que son successeur. Les nombres cherchés sont ceux dont tous les chiffres sont identiques.

3. Les *grands pairs* : $11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19,$

$22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 55, 56, 57, 58, 59, 66, 67, 68, 69, 77, 78, 79, 88, 89, 99$;

Les *grands impairs* : $10, 11, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 33, 40, 41, 42, 43, 44, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 60, 61, 62, 63, 64,$

$65, 66, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99.$

Il y a davantage de *grands impairs* : 54 contre 45 (cela fait 99, ce qui est trop, mais les multiples de 11 sont comptés dans les deux catégories).

4. *a.* $3\,021 = 1\,000 + 2\,021 = 1\,010 + 2\,011$, cela fait deux sommes de grands impairs de quatre chiffres.

b. Comme on cherche deux *grands pairs* de quatre chiffres, aucun des deux ne peut avoir 2 comme chiffre des mille. Ils commencent donc par 1 l'un et l'autre… On trouve par exemple : $3\,021 = 1\,509 + 1\,512$

5. Le cas des chiffres $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, qui sont aussi bien des grands pairs que des grands impairs, se résout en écrivant chacun comme la somme de deux plus petits : $3 = 2 + 1, 4 = 3 + 1$, etc.

Si l'entier n s'écrit avec deux chiffres ou plus, on peut écrire $n = \overline{iPiPiP\ldots}$, où les chiffres "$P$" apparaissant sont plus grands que les "i" qui les encadrent. Les nombres $\overline{i0i0i0\ldots}$(avec le même nombre de chiffres que n) et $\overline{P0P0P0\ldots}$ (avec un chiffre de moins que n) sont de grands impairs dont la somme est n (il n'y a jamais de retenue).

6. Considérons un *grand impair* N inférieur à 100. Supposons que N s'écrive avec deux chiffres. Il existe des chiffres a et b tels que $n = 10a + b$ et $a \geq b$. On peut alors écrire $N = (10(a-1) + a) + (10 + b - a)$. Cette somme a pour termes un nombre s'écrivant avec un seul chiffre $(10 + b - a)$, donc *grand* pair, l'autre en ayant deux si $a > 1$ et il est *grand pair* par construction. Dans le cas où $a = 1$, on fait apparaître deux nombres à un seul chiffre, *grands pairs*. Reste le cas des nombres s'écrivant avec un seul chiffre. À l'exception de 1, ils sont tous sommes de deux nombres à un seul chiffre.

7. La question précédente montre qu'il faut chercher parmi les nombres supérieurs ou égaux à 100. On trouve : $100 = 45 + 55, 101 = 46 + 55, 102 = 47 + 55, 103 = 48 + 55, 104 = 49 + 55, 105 = 39 + 66,$

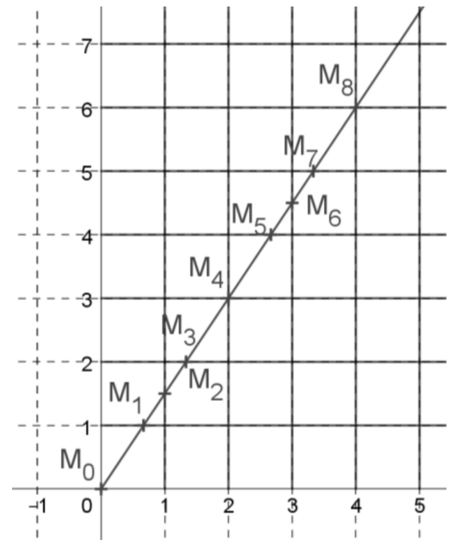
$106 = 38 + 68, 107 = 39 + 68, 108 = 79 + 29.$

Supposons qu'il existe des chiffres a, b, c, d tels que $109 = 10a + b + 10c + d$ et tels que $a \leq b$ et $c \leq d$. Pour que $109 = 10(a + c) + (b + d)$, il est nécessaire que $b + d > 10$, car sinon le second membre de l'égalité est inférieur ou égal à 100. Donc $b + d \geq 10$ et l'addition comporte une retenue, mais cela signifie que $b + d = 19$, ce qui est impossible pour des chiffres. Donc 109 est le nombre cherché.

8. On suit les indices de 2 en 2 en comparant $\mathrm{T}[i]$ à son prédécesseur et à son successeur. Tant que la comparaison reste à l'avantage de $\mathrm{T}[i]$, la variable « resultat » reste 1. Lorsque l'une des comparaisons tourne mal, « redultat » passe à 0 et l'algorithme s'achève sur ce résultat.

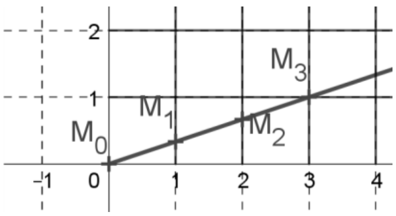
Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)
Des droites et des mots

Éléments de solution



1. La demi-droite d'équation $y = 1{,}5x$ détermine avec les droites du quadrillage les points M_i du graphique de droite, auxquels sont successivement associées les lettres C, H, V, H, C, H, V, H, etc.

2. La première intersection avec les droites du quadrillage est le point O, qui se trouve sur une horizontale et sur une verticale.



3. Le motif CVV est associé à une demi-droite qui rencontre la verticale d'équation $x = 3$ en même temps que l'horizontale d'équation $y = 1$. Cette demi-droite a donc pour équation $y = \frac{x}{3}$. On vérifie que les deux premiers points d'intersection avec les droites du quadrillage ont pour abscisses 1 et 2 et pour ordonnées $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$.

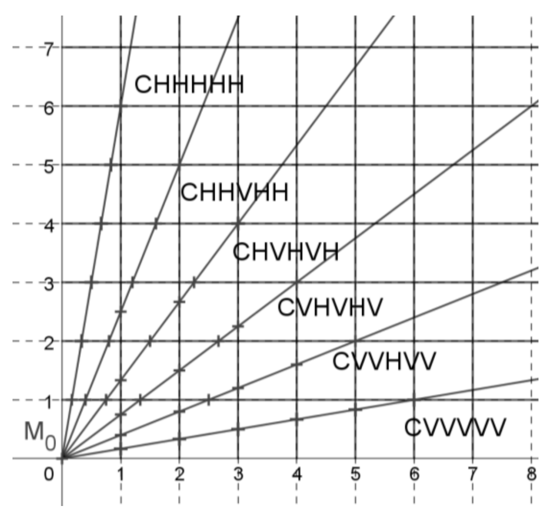
4. ***a.*** Si on rencontre la succession VV dans le mot associé à la demi-droite d'équation $y = ax$, c'est qu'il existe un entier n et un entier p tels que les solutions des équations $ax = p$ et $ax = p + 1$ soient l'une à gauche de l'intervalle $]n-1, n[$, l'autre à droite. Leur différence $\frac{1}{a}$ est donc supérieure à 1, et donc $a < 1$.

b. Pour des raisons semblables, on trouve la séquence HH dans le mot associé à la demi-droite d'équation $y = ax$ lorsque la pente de cette demi-droite est supérieure à 1.

c. On a vu à la question **3.** que la succession CVV détermine une unique droite, dont le mot associé est CVVCVVCVV… Il n'y a donc pas de droite associée à un mot commençant par CVVHHC, par exemple.

5. La septième lettre d'un mot de période 6 est C. Si les coordonnées du point M_6 sont les entiers a et b, la demi-droite associée a pour équation $y = \frac{b}{a}x$. La période ne peut être que 6. De M_0 à M_6, la demi-droite rencontre :

- ou bien 7 verticales et pas d'horizontale autre que celles d'équation $x = 0$ et $x = 1$; le point M_6 a pour coordonnées $(6, 1)$;
- ou bien 7 verticales et l'horizontale d'équation $x = 1$ (plus celles d'équations $x = 0$ et $x = 2$). Ce cas est à exclure, car il conduit au motif CVV et à la période 3 ;
- ou bien 6 verticales (et une horizontale en un point non déjà compté) ; le point M_6 a pour coordonnées $(5, 2)$;
- ou bien 5 verticales (et 2 horizontales en des points non déjà comptés) ; point M_6 a pour coordonnées $(4, 3)$;
- ou bien 4 verticales ; point M_6 a pour coordonnées $(3, 4)$;
- ou bien 3 verticales ; point M_6 a pour coordonnées $(2,5)$;
- ou bien 2 verticales ; point M_6 a pour coordonnées $(1, 6)$;



6. Pour que le mot associé à une demi-droite soit périodique, il faut qu'après un premier motif CXXXX … un autre débute, lui aussi par C, donc que la droite passe par un point à coordonnées entières. La pente de cette demi-droite est donc rationnelle. Réciproquement, une demi-droite de pente rationnelle a pour équation $y = \frac{a}{b}x$, a et b étant des entiers, donc elle passe par le point de coordonnées (b, a).

7. La droite d'équation $y = \frac{1}{p}x$ réalise cet objectif.

8. La demi-droite de pente $\sqrt{2}$ rencontre la verticale d'équation $x = n$ en un point nécessairement codé V, puisque c'est le point d'intersection avec une verticale. Les points associés à la lettre H sont les points de coordonnées (x, y) pour lesquels existe un entier m tel que $y = m, x = \frac{m}{\sqrt{2}}$ et $\frac{m}{\sqrt{2}} < n$. Leur nombre est donc égal au plus grand entier inférieur à $n\sqrt{2}$. Cela donne $n\sqrt{2} - 1 \leq F_W(n) \leq n\sqrt{2}$. La limite de $\frac{F_W(n)}{n}$existe et vaut $\sqrt{2}$.

Exercice national numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)
Additionnons des points

Éléments de solution

Somme de carrés

1. Le rectangle de longueur $1+2+3+4+5=15$ et de largeur $2\times 5+1=11$ a été rempli avec le contenu de trois pyramides carrées de base 5^2, contenu qui a été détaillé « étage par étage ».
On a donc $15\times 11=3\times S(5)$. Et donc $S(5)=55$.

2. *a.* Des nombres n et $(n+1)$, consécutifs, l'un est pair. Si n n'est pas multiple de 3 et $(n+1)$ non plus, alors $(2n+1)$ l'est (l'un a pour reste 1, l'autre pour reste 2, peu importe l'ordre, et leur somme a pour reste $1+2$, c'est-à-dire 0.

b. $S(n)+(n+1)^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2=\frac{1}{6}(n+1)(6n+6+2n^2+n)$
$=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$. Nous avons établi un résultat général.

3. $S(24)=\frac{1}{6}\times 24\times 25\times 49=4\times 25\times 49=(2\times 5\times 7)^2=70^2$.

Addition sur une courbe

1. Un peu d'exploration

a. On vérifie que $70^2=\frac{1}{6}(24\times 25\times 49)$, ce qui avait été fait à la question précédente, tout comme pour $1^2=\frac{1}{6}\times 1\times 2\times 3$.

Pour $x=2$, on doit avoir $y^2=\frac{1}{6}\times 2\times 3\times 5$. On en déduit que le point de coordonnées $\left(2,\sqrt{5}\right)$ appartient à l'ensemble, tout comme le point de coordonnées $\left(2,-\sqrt{5}\right)$.

b. Pour $x=-2$, on doit avoir $y^2=\frac{1}{6}\times -2\times -1\times -3$. Comme le second membre de l'égalité est négatif, il n'y a pas de solution en y. Pour $x=-\frac{1}{4}$, on doit avoir $y^2=\frac{1}{6}\times -\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}$, le second membre de l'égalité est négatif…

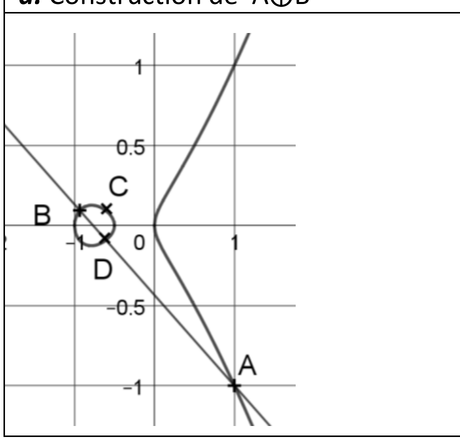
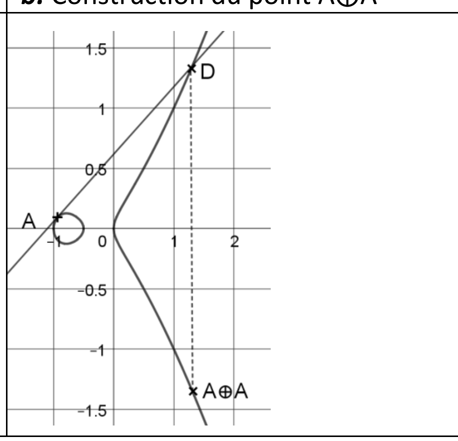
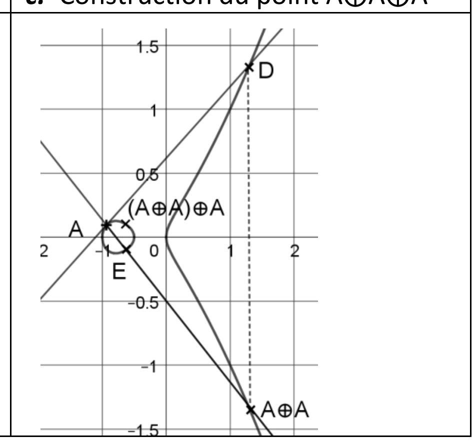
c. Pour qu'il y ait un point d'abscisse x donnée sur la courbe, il est nécessaire que $x(x+1)(2x+1)$soit positif. L'ensemble admissible pour x est donc $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]\cup[0,+\infty[$. Pour une abscisse x située à l'intérieur d'un des deux intervalles, il y a deux ordonnées possibles, opposées, donc deux points sur la courbe, symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Pour $x=-1, x=-\frac{1}{2}, x=0$, le point appartient à l'axe des abscisses.

2. La forme de la courbe

a. On a $\frac{3\times y^2}{x^3}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(2+\frac{1}{x}\right)$. Les deux facteurs figurant entre parenthèses au second membre s'approchent respectivement de 1 et 2 lorsque x tend croît. Donc le quotient figurant au premier membre s'approche de 2

b. Lorsque x décrit l'intervalle $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$, le point de la courbe d'abscisse x appartient à un arc de courbe situé au-dessus de l'axe des abscisses, ou à son symétrique situé au-dessous. Ces deux arcs se recollent aux points d'abscisses -1 et $-\frac{1}{2}$.

3. Somme de deux points

<table>
<tr><td>a. Construction de A⊕B</td><td>b. Construction du point A⊕A</td><td>c. Construction du point A⊕A⊕A</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

4. Un système de codage

Alice donne à Bruno les coordonnées (0,02083333, 0,06076389), qui sont les coordonnées de 2M. Bruno donne à Alice les coordonnées (0,02908309, −0,07265188), qui sont les coordonnées de M. La clef est donc constituée des quatre premières décimales de l'abscisse de 10M : $5\ 9\ 2\ 7$.