

# **Classe de première S**





# orientations générales

Le programme publié dans le *BO* hors série n° 7 du 31 août 2000 expose de façon détaillée les objectifs de l'enseignement des mathématiques en classe de première S ; le présent document ne reprend donc pas les éléments de présentation générale largement explicités dans les premiers paragraphes du programme.

L'objectif de ce document d'accompagnement est d'aider à la compréhension du texte du programme et d'illustrer par des exemples les objectifs visés. Il est à l'usage des enseignants : ceux-ci pourront adapter certains exemples ou exercices pour leur classe ; en revanche, quelques prolongements ou approfondissements, destinés aux enseignants, ne doivent pas donner lieu *a priori* à des activités pour des élèves.

Ce document a pour fonction de faciliter les échanges et de permettre des régulations entre les acteurs concernés par l'application du programme ; une trop grande directivité, qui irait à l'encontre du maintien de l'espace de liberté pédagogique laissé à l'enseignant, n'est pas souhaitable. Il n'est bien sûr pas obligatoire de traiter les exemples et exercices proposés : ceux-ci peuvent être remplacés par d'autres situations relevant du même esprit.

Ce document prend en compte les résultats de la consultation du dernier trimestre 2000 sur les programmes de première et explicite certains items ; il sera mis à jour et complété en ligne sur le site Eduscol ([www.education.eduscol.fr](http://www.education.eduscol.fr)). En effet, si les exégèses d'un programme convergent au bout d'un certain temps, ce n'est pas le cas lors de sa parution (sauf à transformer le programme en libellé d'un protocole éducatif strictement technique) ; le document d'accompagnement permettra un recentrage par rapport aux diverses interprétations et fera ainsi office d'outil de régulation de la mise en œuvre du programme.

Ce document ne fournit pas de liste des compétences exigibles : une telle liste est toujours de nature technique et ne pourrait concerner que les savoir-faire et non les savoirs ; de plus, elle n'a jamais figuré dans un document officiel en mathématiques à ce niveau et le groupe chargé de l'élaboration des programmes a préféré s'en tenir à cette pratique. En effet, la publication d'une telle liste, derrière le côté rassurant qui faciliterait à très court terme la lecture et la mise en œuvre du nouveau programme, placerait les enseignants dans un rôle passif vis-à-vis des mathématiques qu'ils ont à enseigner. Le système de contraintes lié à une spécification précise des compétences exigibles bloquerait à la fois la créativité du corps enseignant et l'évolution des pratiques ; détacher d'emblée les savoir-faire techniques qui peuvent faire l'objet d'une interrogation à l'examen des notions et concepts en jeu, irait à l'encontre de l'enseignement de qualité que souhaite toute la communauté mathématique.

• Un large consensus s'est dégagé auprès des acteurs concernés par l'enseignement des mathématiques dans une filière scientifique pour que les grands objectifs suivants soient retenus :

- apprendre à diversifier les raisonnements et les démonstrations ;
- acquérir la maîtrise de techniques de calcul ;
- renforcer les passages entre les divers champs mathématiques ;
- introduire la modélisation ;
- utiliser à bon escient les outils informatiques.

C'est dans cette perspective que les concepts suivants sont introduits en classe de première S : dérivée et suites en analyse ; repérage et description d'objets du plan et de l'espace et calcul vectoriel ; variable aléatoire en statistique et probabilités.

- Ce programme se situe dans la ligne des programmes antérieurs de la série scientifique : on y retrouve les mêmes concepts de base, mais avec des éclairages différents ou des points de vue nouveaux.

Il rejoint en particulier le programme précédent dans lequel étaient évoquées « capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique », capacités déclinées sous les différents aspects suivants : « formuler un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une démonstration, mettre en œuvre des outils théoriques, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus, évaluer leur pertinence en fonction du problème posé. »

- Le schéma initial du programme propose une représentation simplifiée des sciences mathématiques. Il a pour fonction de résumer et structurer l'information traitée et permet d'en avoir une vision non linéaire ; il peut aider les élèves, les parents et toutes les personnes intéressées par le système éducatif à situer l'enjeu de l'enseignement des mathématiques au lycée. À ce titre, il participe à un travail de vulgarisation aujourd'hui absolument nécessaire.

Ce schéma s'adresse aussi à tous les enseignants, par son invitation à choisir des problématiques suffisamment riches, issues de la réalité ou de domaines déjà familiers aux élèves – mathématiques ou autres –, pour aboutir à de nouveaux concepts et à des résultats nouveaux : les élèves doivent pouvoir se rendre compte que l'étude d'une notion se fait à partir de questions et permet d'élaborer des éléments de réponse.

Pour information, on rejoint ici le point de vue adopté par des experts de l'OCDE qui définissent « la culture mathématique (*mathematical literacy*) » comme « l'aptitude d'un individu à identifier et à comprendre les divers rôles joués par les mathématiques dans le monde, à porter des jugements fondés à leur propos, et à s'engager dans des activités mathématiques, en fonction des exigences de sa vie présente et future en tant que citoyen constructif, impliqué et réfléchi » (Programme international pour le suivi des acquis des élèves – PISA – visant à évaluer régulièrement les savoirs et compétences acquis par les jeunes de quinze ans d'une trentaine de pays).

- Comme dans l'ensemble du système scolaire, ce programme prend en compte l'intégration des TICE, dans la continuité des programmes de collège et de seconde. On trouvera sur le site Educnet à l'adresse [www.educnet.education.fr/math](http://www.educnet.education.fr/math) des exemples de séquences pour lesquels l'outil logiciel facilite la résolution de la question traitée et l'appropriation de nouveaux concepts, et permet de revisiter un domaine déjà vu.

## propos d'une formation scientifique en première et terminale S : des exemples

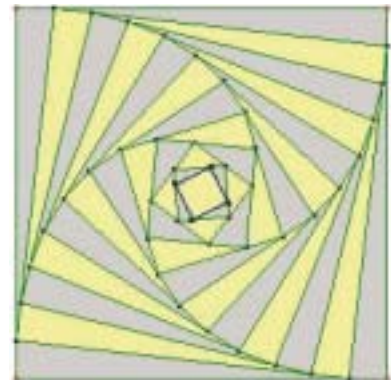
Le programme explicite quatre composantes de l'activité mathématique (observer, abstraire, expérimenter, démontrer) : partagés avec de nombreuses autres sciences, ces différents aspects se conjuguent spécifiquement en mathématiques. Les deux exemples qui suivent illustrent cette spécificité.

Bien sûr, il ne s'agit pas de faire du repérage de ces composantes un objectif d'enseignement, ni d'en faire la base de grilles de lecture systématique des activités des élèves : l'enseignant veillera simplement à ce que s'établisse peu à peu une dynamique entre chacune d'elles.

### Exemple 1

On part d'un carré de côté 10 unités. Sur chaque côté, en tournant dans le même sens, on place un point situé à la distance 1 de chaque sommet du carré. Et on itère...

Établir que l'on obtient bien ainsi un nouveau carré. On note  $K_2$  ce nouveau carré et  $k_2$  son côté.



En **observant** cette figure, on peut se demander si le dessin s'arrête et comment évoluent les côtés et les aires des carrés.

On peut **expérimenter** numériquement et vérifier que les résultats numériques se stabilisent.

La question se pose alors de savoir si le processus se stabilise effectivement sur un carré et si les observations graphiques et numériques pourtant cohérentes donnent une vision exacte du phénomène.

n	k (n)	n	k (n)
1	10	9	2,80034534815394
2	9,05538513813742	10	2,05942792362819
3	8,11721810251056	11	1,45684162672651
4	7,18712693074945	12	1,09941087492808
5	6,26741889913265	13	1,00492911294975
6	5,36150182868008	14	1,00001214800345
7	4,47467297146727	15	1,0000000007379
8	3,61570909485887	16	1,00000000000000

Une première **abstraction** consiste à associer à ce problème de construction de carrés la suite infinie  $(k_n)$  des mesures des côtés et à étudier les points suivants :

- Monotonie de la suite  $(k_n)$ .
- Peut-on avoir un terme de la suite strictement plus petit que 1 ?
- Existe-t-il un entier  $r$  tel que  $k_r = 1$  ?

- Les expériences graphiques et numériques conduisent aussi à étudier la suite  $(u_n)$  avec  $u_n = k_n - 1$  :
  - $(u_n)$  est décroissante ; tous les  $u_n$  sont strictement positifs ;
  - on a aussi  $u_n < (u_{n-1})^2/2$  ; comme  $u_{11} < 1$ , on a  $u_{12} < (u_{11}/2)$  et  $u_{n+11} < u_{11}/2^n$ . Donc  $(u_n)$  converge vers 0, et  $(k_n)$  vers 1.

Cet exercice peut être repris en terminale en partant d'un carré de côté  $k$  quelconque ; la suite étant décroissante positive converge vers une limite  $l$  qui vérifie  $l = \sqrt{(l-1)^2 + 1}$ , soit  $l=1$  et la suite  $(u_n)$  converge vers 0.

On remarquera alors que :  $0 < (k_n - 1) < (k_{n-1} - 1)^2$ , donc si  $k_r - 1 < 10^{-1}$ , alors  $k_{r+1} - 1 < 10^{-2}$ ,  $k_{r+2} - 1 < 10^{-4}$ ,  $k_{r+3} - 1 < 10^{-8}$ ,  $k_{r+4} - 1 < 10^{-16}$  : la précision double à chaque fois ; ainsi, pour  $k_0 = 10$ ,  $k_{12} - 1 < 10^{-1}$  et on peut prévoir, au-delà des chiffres donnés par la calculatrice ou l'ordinateur, que  $k_{16}$  vaudra 1 à moins de  $10^{-16}$  près.

### Exemple 2 : somme de deux dés

En répétant 100 fois de suite le lancer de deux dés et en effectuant la somme des points obtenus, on observe que certains résultats s'obtiennent plus souvent que d'autres.

On simule un plus grand nombre de lancers de deux dés (en réfléchissant à la pertinence de l'algorithme de simulation) et on construit le tableau des effectifs ou des distributions des fréquences : l'inégale répartition des fréquences de chaque résultat est flagrante.

La recherche d'un modèle théorique adapté avec une loi de probabilité équirépartie permet ensuite calculs et démonstrations : on prouve que les résultats sont inégalement probables et on détermine précisément leur probabilité.

Résultats pour 5 séries de 100 lancers

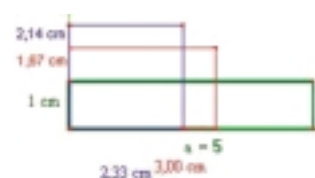
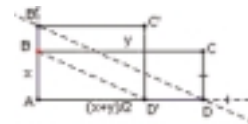
2	0,02	0,02	0,01	0,03	0,01
3	0,03	0,02	0,09	0,06	0,04
4	0,08	0,08	0,08	0,08	0,1
5	0,11	0,11	0,12	0,09	0,11
6	0,17	0,13	0,1	0,11	0,11
7	0,15	0,15	0,12	0,14	0,2
8	0,12	0,2	0,1	0,13	0,22
9	0,15	0,1	0,12	0,13	0,06
10	0,09	0,1	0,14	0,1	0,08
11	0,06	0,05	0,06	0,09	0,06
12	0,02	0,04	0,06	0,04	0,01

Le programme incite aussi à la diversité des points de vue sur une même question : on trouvera à ce propos un exemple classique du passage du géométrique au numérique, de l'ancien au moderne. Un tel exemple peut être le support de plusieurs exercices à différents moments de l'année, ou d'un devoir à la maison de synthèse.

### Exemple 3

1 - L'algorithme de Babylone vise à construire un carré d'aire égale à celle d'un rectangle donné ABCD ; on construit pour cela le rectangle A'B'C'D' dont une dimension est la moyenne des dimensions de ABCD et dont l'aire est égale à celle de ABCD. À l'aide de la figure ci-contre, on montrera comment construire A'B'C'D'. On recommence cette construction à partir de A'B'C'D', etc.

2 - Dans l'exemple ci-dessous, on observe que trois itérations suffisent pour obtenir pratiquement un carré.



3 – On peut passer dans le champ numérique et expérimenter en calculant les premiers termes des suites donnant les dimensions  $x_n$  et  $y_n$  du rectangle de l'étape  $n$ . Un tel calcul a été expliqué par Héron d'Alexandrie dans ses *Métriques* (1<sup>er</sup> siècle après J.-C.). On observera sur les résultats ci-dessous la rapidité de la convergence.

racine à calculer		5
1	5	1
2	3	1,666666667
3	2,333333333	2,142857143
4	2,238095238	2,234042553
5	2,236068896	2,236067059
6	2,236067977	2,236067977
7	2,236067977	2,236067977

4 – On peut aussi relier cette méthode à la méthode « moderne » de Newton (XVII<sup>e</sup> siècle) d'approximation du zéro de la fonction  $f(x) = x^2 - a$ ; la suite des approximations est la même que celle trouvée en 2 et 3.



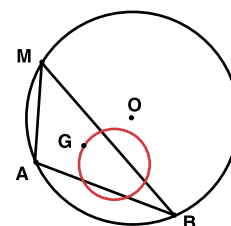
La mise en œuvre anticipée du programme de seconde dans une vingtaine de lycées durant l'année 1999-2000 a confirmé le grand intérêt de l'usage d'outils logiciels pour améliorer l'approche et l'assimilation de certains concepts (les deux exemples précédents illustrent déjà cette observation) ; l'exemple qui suit y revient et montre le changement de point de vue induit par l'expérimentation informatique. L'expérimentation devient si facile que la question : « Est-ce vrai ? », qui motive la démonstration, est souvent remplacée par : « Pourquoi est-ce ainsi ? ». La démonstration non seulement confirmera certains aspects des observations, mais sera ici l'unique outil qui permettra de comprendre, d'expliquer, de préciser et de quantifier, voire d'aller plus loin.

#### Exemple 4 : recherche d'un lieu géométrique

Les logiciels de géométrie dynamique permettent de déplacer les éléments ayant servi de points de départ de la figure. Ils permettent donc facilement d'observer la trace des points dont on cherche le lieu. À partir des conjectures que l'on peut ainsi effectuer sur la nature du lieu, le questionnement mathématique conduit à s'interroger sur la caractérisation géométrique de ce lieu et à chercher une démonstration. Dans l'élaboration de cette démonstration, l'élève est amené à faire de fréquents allers-retours entre l'observation et le domaine mathématique. Le raisonnement peut d'ailleurs l'amener à affiner son observation.

Que devient le centre de gravité d'un triangle ABM lorsque le point M décrit un cercle passant par A et B ? Le logiciel fait apparaître ce lieu comme un cercle. Est-ce une simple apparence ? Tous les points du cercle sont-ils des points du lieu ? Comment déterminer le centre et le rayon ?

Des connaissances géométriques sont nécessaires pour trouver comment le centre du lieu peut se déduire des points A, B et O ayant servi de points de départ de la figure, pour porter l'attention sur l'observation de certains invariants (invariant de direction ou d'alignement) et pour les interpréter.



Il est souhaitable que l'enseignant garde toujours le souci de donner à ses élèves une vision élargie de ce qui est fait dans la classe (donner du sens et du souffle !) : le plus souvent, les problèmes abordés ne sont pas clos et il ne faut pas hésiter à proposer des ouvertures dont certaines seulement peuvent être traitées. Même si tous les élèves ne sont pas au même degré de maturité et ne sont pas tous prêts à comprendre, quelque chose passe et restera ; il faut continuer à tout faire pour éviter de donner des mathématiques une vision étriquée réduite à des techniques... Ce souci d'ouverture n'est pas à opposer à la nécessité d'un travail de détail : c'est ce dernier qui est le plus contraignant. C'est à ce moment-là que se révèle la maîtrise des techniques de base au service d'une bonne compréhension.



## propos de la démonstration

Observons tout d'abord que les moyens d'expression de la pensée mathématique sont variés. D'ailleurs, un certain nombre d'entre eux ne sont pas propres aux mathématiques : argumenter, convaincre, etc. et se retrouvent aussi bien dans la dissertation en français, en philosophie ou en histoire que lors de travaux en sciences expérimentales. Par ailleurs, dans toutes les disciplines, c'est la même langue que l'on utilise, avec ses règles syntaxiques, ses mots de liaison logique. À ce titre, le professeur de mathématiques participe au travail de maîtrise de la langue française, tout particulièrement de la syntaxe, et il importe que les élèves en aient conscience.

Comme il est dit dans le programme, la démonstration est constitutive de l'activité mathématique ; elle doit donc être largement présente lors des cours et travaux demandés aux élèves.

La démonstration soigneusement rédigée sous la forme d'un texte linéaire a été entrevue au collège ; tout lycéen de première doit la maîtriser, au moins dans des cas élémentaires tel celui de l'exemple 1 ci-dessous. Dans d'autres cas, notamment en analyse, on se contentera d'argumentations visuelles ou graphiques, convaincantes et révélatrices d'une bonne compréhension du problème posé, telles celles en jeu dans l'exemple 3.

Une place particulière est réservée en mathématiques au langage symbolique : on en évitera tout excès ; mieux vaut privilégier le langage français usuel. L'abus d'expressions symboliques amène certains élèves à confondre symboles mathématiques et système d'abréviations, voire — cas extrême — à croire que c'est faire des mathématiques que d'habiller un texte de symboles ou de termes spécifiques.

La rigueur du discours mathématique doit s'exercer à bon escient et, lors de la rédaction de démonstrations, on convient d'adopter systématiquement certains raccourcis, tels celui du tableau de variations évoqué dans l'exemple 2 ci-après.

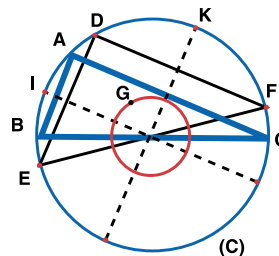
Démontrer, c'est aussi calculer en respectant des règles. En analyse, l'utilisation du concept de limite d'une fonction en un point ou à l'infini repose sur l'intuition et la pratique de certains calculs et il n'est pas indispensable à ce niveau de définir formellement ce concept ; on peut ensuite dégager un certain nombre de règles opératoires qui seront directement mises en œuvre dans les calculs de limite. S'il convient de dire aux élèves que ces règles correspondent à des théorèmes démontrables dans un cadre formel qui sera développé ultérieurement, il n'y a pas lieu d'en justifier systématiquement l'emploi.

Enfin, le discours mathématique, contrairement au discours usuel, est toujours complètement cohérent (pas d'« exception qui confirme la règle ») ; il est important de savoir repérer, et même chercher, les incohérences révélatrices d'erreurs et de remonter à la source de la contradiction. L'élève apprendra ainsi que le bon mathématicien n'est pas forcément celui qui ne fait jamais d'erreurs de calcul, mais bien plutôt celui qui, parce qu'il a bien compris la situation, possède de multiples façons de vérifier que son résultat n'est pas absurde et qui saura, si besoin est, corriger ses erreurs. Par exemple, si le calcul d'un carré donne un nombre négatif, on sait que ce résultat est impossible et qu'il vient probablement d'une erreur de calcul ; de nombreuses autres situations donnent lieu à un contrôle simple par le signe. Si la probabilité d'un ensemble est supérieure à 1, l'impossibilité du résultat doit être immédiatement perçue et au moins commentée, etc. Une telle recherche de vraisemblance n'est pas automatique chez l'élève : l'acquiescer est un objectif de l'enseignement de mathématiques et ne peut venir que d'un entraînement régulier.



**Exemple 1 (démonstration complètement rédigée)**

Soit  $C$  un cercle de diamètre  $[BC]$ , de centre  $O$ ,  $A$  un point de  $C$  distinct de  $B$  et  $C$ ,  $I$  et  $J$  (respectivement  $K$  et  $L$ ) les points d'intersection de  $C$  et du diamètre perpendiculaire à  $(AB)$  (resp. à  $(AC)$ ). À tout point  $D$  de  $C$  distinct de  $I, J, K$  et  $L$ , on associe  $E$  (resp.  $F$ ) deuxième point d'intersection de  $C$  avec la droite parallèle à  $(AB)$  (resp. à  $(AC)$ ) passant par  $D$ . Déterminer le lieu géométrique de l'isobarycentre  $G$  du triangle  $DEF$ .



(Cet énoncé, très proche de celui de l'exemple 4, p. 49, correspond à un sujet classique de contrôle; dans un autre cadre, les précisions sur  $I, J, K$  et  $L$  pourraient être supprimées.)

$[BC]$  étant un diamètre de  $C$ , les droites  $(AB)$  et  $(AC)$  sont perpendiculaires. Leurs parallèles respectives passant par  $D$  sont aussi perpendiculaires : le triangle  $DEF$  (lorsqu'il existe) est donc rectangle en  $D$ ; on en déduit que  $[EF]$  est un diamètre de  $C$ . Le point  $G$ , isobarycentre du triangle  $DEF$ , vérifie alors  $\vec{OG} = \frac{1}{3}\vec{OD}$ ;  $G$  est donc l'image du point  $D$  par l'homothétie  $h$  de centre  $O$  et de rapport  $\frac{1}{3}$ .

Le point  $D$  décrit le cercle  $C$  privé des points  $I, J, K$  et  $L$ ; l'énoncé sous-entend en effet que les points  $E$  et  $F$  sont alors tous deux distincts de  $D$ . (On peut le justifier :  $E$  est confondu avec  $D$  si et seulement si la parallèle à  $(AB)$  passant par  $D$  coupe le cercle en le seul point  $D$ , c'est-à-dire si et seulement si cette parallèle est tangente au cercle en  $D$ ; les tangentes au cercle parallèles à  $(AB)$  sont perpendiculaires au diamètre  $[IJ]$ ; il existe exactement deux telles tangentes et elles sont obtenues quand  $D$  est en  $I$  ou en  $J$ .  $E$  est donc distinct de  $D$  quand  $D$  est distinct de  $I$  et  $J$ . De même,  $D$  est distinct de  $F$  quand  $D$  est distinct de  $K$  et  $L$ .)

Or, l'image par  $h$  d'un cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $r$  (respectivement privé d'un ou plusieurs points) est un cercle de centre  $h(\Omega)$  et de rayon  $\frac{1}{3}r$  (respectivement privé du ou des points images).

Quand  $D$  décrit le cercle  $C$  de centre  $O$  et de rayon  $OB$ , privé des points  $I, J, K$  et  $L$ ,  $G$  décrit donc le cercle  $C'$  image de  $C$  par  $h$ , centré en  $O$  (car  $h(O) = O$ ) et de rayon  $\frac{1}{3}OB$ , privé des points  $h(I), h(J), h(K)$  et  $h(L)$ .

Une telle forme achevée dépend bien sûr du niveau d'études où l'on se trouve, certains arguments indispensables au niveau d'études  $n$  devenant triviaux et donc implicites et inutiles au niveau  $n + 1$ . La « démonstration linéaire achevée » n'est par ailleurs que la dernière étape d'un processus, la dernière mise en forme; elle est indispensable car elle participe à la structuration des acquis, constitue le mode de communication le plus achevé et valide tout le travail qui précède; l'expérience seule permet d'en faire l'économie : si on ne la rédige pas intégralement, on sait qu'en cas de besoin, on pourra le faire. Il est à noter que, pour la plupart des élèves, le lycée sera le seul lieu où un travail de cette nature est systématiquement conduit. Mais il convient d'être raisonnable et progressif dans les exigences académiques : par ailleurs, les chemins de pensée qui mènent peu à peu à la possibilité de telles rédactions doivent aussi être reconnus comme un vrai travail.

**Exemple 2 : utilisation du tableau de variations d'une fonction**

Supposons que l'étude des variations d'une fonction permette d'aboutir au tableau de variations suivant.

$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$3$	$+\infty$
$f(x)$	$1$	$-1$	$+\infty$	$5$	$-\infty$

On convient que le tableau de variations est une forme stylisée de représentation graphique : le plus souvent, elle pourra suffire au niveau des productions des élèves, sauf cas particuliers mettant en jeu des tangentes, asymptotes ou autres courbes indispensables pour la bonne réalisation de l'étude. La calculatrice graphique donnera un tracé plus précis.

On suppose par cette convention qu'il n'y a pas de « sauts » dans la courbe représentative sur un intervalle donné (notion intuitive de continuité qui sera précisée en terminale) et qu'une flèche inclinée correspond à une stricte monotonie.

On pourra alors en déduire sans discours supplémentaire :

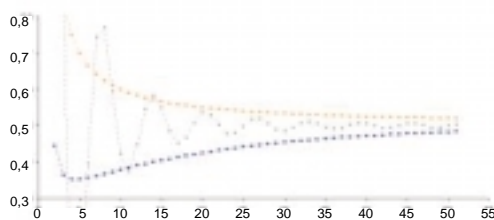
- des encadrements d'images ;
- le nombre de zéros de  $f$ .

*Remarque* : la notion de fonction a été approchée au collège et explicitée en seconde. Les élèves ont toujours des difficultés à se faire une idée précise et opérationnelle de ce nouvel objet généralement noté  $f$ . Ils confondent souvent les deux notations  $f$  et  $f(x)$ . Leur expérience des expressions algébriques dans lesquelles figure une inconnue est plus ancienne que celle des problèmes spécifiques aux fonctions. Au cours du cycle terminal, on aura de nombreuses occasions (dérivée, intégrale, équation différentielle, etc.) d'expliciter la distinction entre  $f$  et  $f(x)$  ; la notion de fonction prendra donc peu à peu sa place dans l'esprit des élèves et la distinction fonction/image d'un point deviendra plus signifiante. Cependant, tout en visant cet objectif pédagogique, on évitera tout purisme excessif ; on expliquera et autorisera à l'occasion certains abus de langage (tels « la fonction  $ax + b$  », « la fonction  $x^2 + 1$  »), utilisés spontanément par les élèves, usuels en physique ou dans l'enseignement supérieur (comme le reconnaît Bourbaki lui-même dans *Théorie des ensembles*, E.R.6).

### Exemple 3 : théorème des « gendarmes » pour les suites

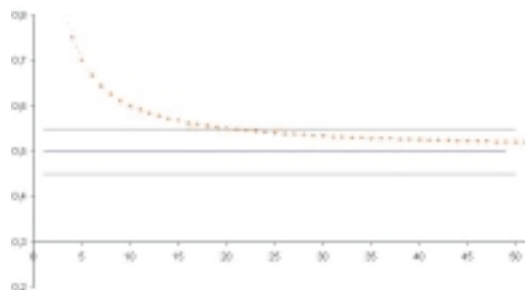
On sait que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ont une même limite  $l$  (ici  $l = 0,5$ ) et que, à partir d'un certain rang,  $w_n$  est encadré par  $u_n$  et  $v_n$  (ici  $u_n < w_n < v_n$  à partir du rang 14). On veut prouver que  $(w_n)$  a aussi pour limite  $l$ , c'est-à-dire que, quel que soit le « tuyau » centré sur la droite d'équation  $y = l$ , tous les  $w_n$  finissent par rentrer dans ce « tuyau ».

Ce qui suit (textes et dessins associés) peut être considéré comme une « démonstration graphique » (cela constitue une première approche de la définition en termes de  $N$  et  $\epsilon$  qui sera amenée dans l'enseignement post-baccalauréat) : une telle démonstration suffit à ce niveau. *Les dessins réalisés ici à l'aide d'un tableur peuvent être remplacés par des croquis faits à la main (on pourrait se contenter d'un seul des deux dessins 2 et 3).*  
 1 - La suite  $(w_n)$  — en noir — est encadrée à partir d'un certain rang (le rang 14) par la suite  $(u_n)$  — en orange — et par la suite  $(v_n)$  — en bleu.

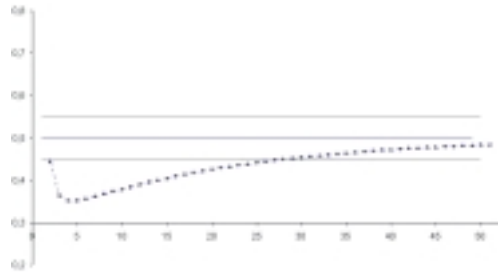


2 - On se donne un « tuyau » centré sur  $l = 0,5$  (ici c'est le « tuyau »  $]0,45 ; 0,55[$ ).

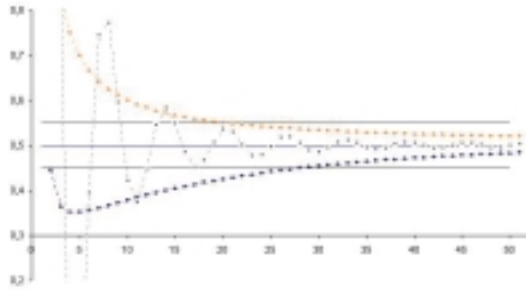
À partir d'un certain rang (ici 20), tous les  $u_n$  rentrent dans le tuyau (car  $(u_n)$  converge vers  $l$ ).



De même, à partir d'un certain rang (ici 30), tous les  $v_n$  rentrent dans le tuyau (car  $(v_n)$  converge vers  $l$ ).

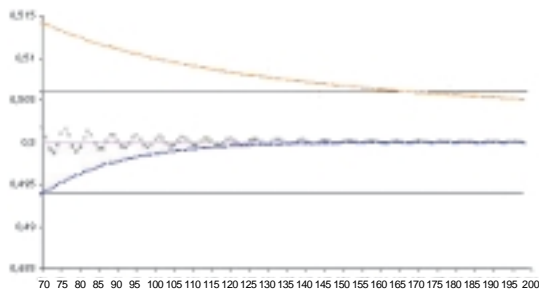
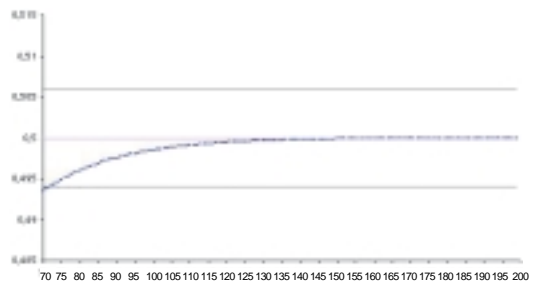
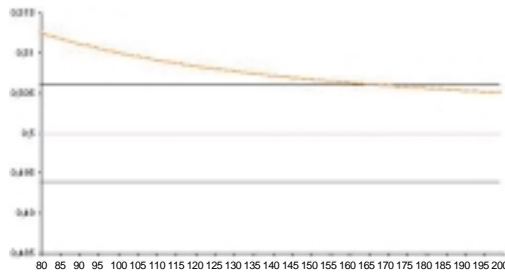


D'où, à partir d'un certain rang (le rang 30), tous les  $w_n$  rentrent dans le tuyau.



3 – Ceci marche pour n'importe quel « tuyau », par exemple pour le « tuyau plus fin »  $]0,495 ; 0,505[$ .

*Remarque :* l'intérêt de ce deuxième tuyau est bien sûr heuristique et non logique.



# M

## émorisation et automatismes

Bien que les mathématiques ne se réduisent pas au calcul, celui-ci est une activité qui dans sa diversité est assez spécifique de cette discipline ; qu'il soit numérique, algébrique ou vectoriel, il est omniprésent et sa pratique régulière est indispensable pour progresser et réussir. Calculs simples et règles opératoires mués en automatismes libèrent la pensée, facilitent la compréhension et permettent de se consacrer à d'autres tâches ; par exemple, la non-linéarité de la fonction racine doit être assimilée au point de devenir un réflexe. Lors de l'étude d'une notion donnée, telle celle de dérivée, un certain niveau de maîtrise du calcul est indispensable pour aborder les problèmes l'introduisant et ne pas engluer la réflexion dans des aspects techniques faisant perdre de vue l'objectif poursuivi : dans le cas cité de la dérivée, il faut être capable de résoudre sans difficulté une équation du second degré, de déterminer rapidement l'équation d'une droite passant par deux points, de simplifier une expression, etc. Mais imposer comme un *a priori* indispensable une technicité poussée est peu motivant ; ainsi, on a voulu éviter de poser l'étude des limites en 0 comme un préalable à l'approche de la dérivée : il est possible de s'appuyer sur une simple approche intuitive et il est plus pertinent d'attendre une situation où ces questions se posent vraiment. On ne peut oublier que c'est aussi en interaction avec des questions posées que se forge une part des outils nécessaires pour avancer.

Il s'agit de viser une certaine aisance, au-delà de laquelle calculatrices et ordinateurs prennent le relais. Dans le registre du calcul automatisé, il ne suffit pas d'obtenir des résultats : il faut d'abord anticiper quelque peu un calcul, au moins dans sa forme, pour percevoir l'intérêt de sa mise en œuvre, puis savoir interpréter les résultats et juger de leur validité et de leur limite.

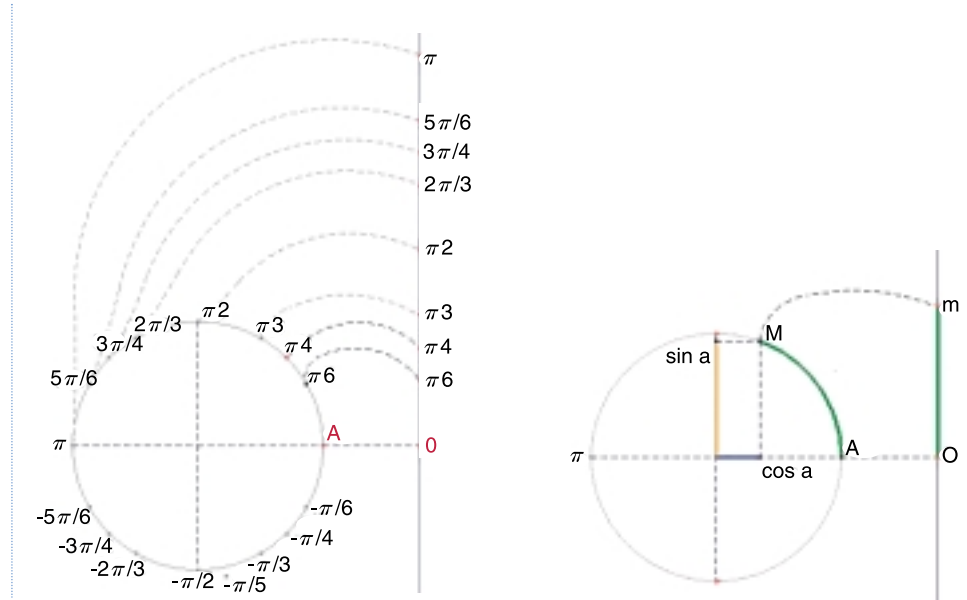
Les derniers développements des calculatrices laissent présager un accès banal à des logiciels de calcul formel. Il s'agit de bien les intégrer à l'ensemble de la démarche d'apprentissage. En complémentarité avec l'entraînement nécessaire à la maîtrise des calculs les plus courants, ils peuvent représenter un moyen précieux de vérification, mais aussi d'investigation, ouvrant la voie à des situations mathématiques plus riches. Prendre l'habitude d'une pratique régulière et individuelle de nombreux petits calculs à la main, à propos de questions variées, est un objectif général dans tout l'enseignement des mathématiques ; cela permet, outre l'acquisition d'automatismes, d'allier apprentissage et compréhension. Il ne s'agit pas pour autant de rechercher la virtuosité : calculatrices et ordinateurs ont rendu cet objectif inutile.

C'est par la mémorisation et l'acquisition d'automatismes que chaque élève peut rendre des objets mentaux familiers et disponibles et se construire un paysage mathématique dans lequel prendront place les nouveaux objets ou théories.

La connaissance et la familiarisation avec les objets du plan et de l'espace retenus par le programme relèvent de la même intention.

### Exemple 1 : le cercle trigonométrique

Être familier du cercle trigonométrique, c'est voir l'« enroulement » de la droite réelle sur le cercle, l'enchaînement de cet enroulement avec les projections pour définir le sinus et le cosinus d'un réel, le « déroulement » correspondant pour comprendre la périodicité du sinus et du cosinus...



On peut (et on doit) aller plus loin dans ce propos. Il est indispensable que les élèves connaissent par cœur et avec la plus grande précision un certain nombre de formules ou théorèmes de base : ceux-ci doivent leur être immédiatement disponibles.



# rganisation et évaluation

Dans la série S, l'année de première est, à plus d'un titre, une année charnière pour l'enseignement des mathématiques. Elle s'inscrit dans le prolongement des années antérieures : le programme de première S s'appuie en effet sur le socle de connaissances mis en place au collège et en seconde, sur les démarches de recherche et de raisonnement demandées par les programmes et explicitées dans les documents d'accompagnement et sur l'utilisation des divers outils de travail à la disposition de l'élève d'aujourd'hui. Elle marque par ailleurs un saut qualitatif important, inévitable en cette première année d'une filière spécifiquement scientifique.

L'enseignant, pour chaque chapitre et en fonction de sa classe, trouvera un équilibre entre les apprentissages techniques et conceptuels. La dialectique entre ces deux pôles est constitutive de la formation visée au lycée ; techniques et réflexion de fond doivent interagir en permanence dans le cours, se soutenir mutuellement, s'équilibrer de façon dynamique, pour que chaque élève puisse avancer à son rythme (la manipulation de règles techniques constitue pour certains élèves une étape nécessaire précédant une compréhension plus profonde, parfois plusieurs semaines ou plusieurs mois plus tard, voire l'année suivante).

Par ailleurs, l'enseignant se trouve au cœur de difficultés qui concernent directement sa pratique professionnelle :

- contradiction entre les attentes naturelles des élèves privilégiant les routines, l'entraînement mécanique, la parcellisation, etc. pour la réussite à l'examen, et la volonté de l'institution de proposer une formation générale dépassant le moment de l'examen, voire le temps scolaire ;
- changement de culture entre des enseignants qui ont accédé au savoir à travers l'écrit et les lycéens d'aujourd'hui qui ont grandi dans un monde dominé par l'image ;
- difficulté de concilier l'accès à des filières scientifiques pour un grand nombre de jeunes et le maintien d'un bon niveau de formation.

Ces problèmes existent ; l'institution ne peut y apporter à elle seule une réponse complètement satisfaisante. Néanmoins, elle doit faire au mieux dans un environnement qu'elle ne contribue aujourd'hui que partiellement à créer.

## L'organisation du travail des élèves

Le programme précise (paragraphe 4) les divers types de travaux à prévoir durant la classe ou en dehors.

Seule une évaluation effectuée *a posteriori* peut permettre d'éventuelles régulations de la mise en œuvre du programme (la perspective de l'examen final rend très difficile, pour l'instant, une expérimentation préalable à ce niveau du cursus). Rappelons ici que l'efficacité de l'enseignement est à optimiser en jouant sur les divers temps du travail des élèves, en classe entière, en demi-classe ou en travail personnel.

À titre indicatif, le temps à consacrer aux différents chapitres pourrait être de 1/7 pour la statistique et les probabilités, le reste se répartissant à peu près équitablement entre géométrie et analyse.

## Le problème de l'évaluation

Ce problème est central dans tout processus de formation : il concerne aussi bien l'évaluation en cours de formation, permettant à l'élève de se situer et à l'enseignant d'adapter ses exigences, que l'évaluation terminale certifiant des acquis pour le passage en classe supérieure ou pour la fin des études secondaires et l'entrée dans l'enseignement supérieur.

Le programme propose quelques pistes en fin de son paragraphe 4. Comme expliqué plus haut, les contenus ne sont pas déclinés en termes de « compétences exigibles » (cf. programme de collège) ou de « capacités attendues » (cf. programme de seconde).



## propos des items du programme

Si le programme précise les contenus à traiter dans chaque paragraphe, il n'impose pas la façon de les aborder : celle-ci est laissée au choix du professeur. Le préambule du programme et de nombreux paragraphes de ce document rappellent néanmoins que la démarche souhaitée est le plus souvent d'aller d'une question ou d'un problème à une notion, l'élève étant partie prenante de l'élaboration de cette notion et de l'explicitation de ses propriétés. Le champ des problèmes et des techniques que les élèves ont à étudier à cette occasion ou en application des notions introduites est en général indiqué dans la colonne « modalités du programme » ; quelques précisions sont apportées ci-dessous.

### Géométrie dans l'espace

Un travail a déjà été mené en classe de troisième sur la nature géométrique et la représentation de certaines sections planes de solides (cube, sphère, cylindre, cône et pyramide). Ce travail est repris ici dans deux directions :

- construire en justifiant les sections planes d'un cube et d'un tétraèdre ; cela doit permettre, d'une part, de réactiver les acquis de seconde (vision et représentation de l'espace, axiomes d'incidence, orthogonalité) et, d'autre part, d'introduire le repérage cartésien de l'espace. On en restera à des exemples simples ;
- établir une équation cartésienne en repère orthonormal de certains objets de l'espace. On observera ici la double signification que prennent en fin de première les mots « cône » et « cylindre » : solide limité ou réunion de droites selon le contexte. L'équation demandée concerne l'objet « réunion de droites » : les élèves doivent savoir en retrouver le mode de calcul.

La géométrie dans l'espace se retrouve également dans un cadre vectoriel dans les paragraphes relatifs au barycentre et aux homothéties et translations : l'essentiel du travail pourra être conduit dans le plan, mais on veillera à proposer quelques exercices ou applications simples dans l'espace.

### Angles orientés et repérage polaire

Le programme a ici fait le choix d'une vision dynamique : se repérer en polaire signifie se ramener à un pôle et à un axe polaire et décrire le mouvement pour rejoindre le point visé. On utilisera les coordonnées polaires usuelles  $(r, \theta)$  avec  $r > 0$  ; on conviendra que le pôle a pour coordonnées polaires  $(0, \theta)$  avec  $\theta$  arbitraire.

On pourra, lors de la mise en place de ce repérage ou à l'occasion d'exercices ou problèmes, utiliser le vocabulaire des rotations introduit en troisième et repris à l'occasion de certaines activités de seconde (cf. document d'accompagnement de seconde et programme de troisième). Dans le programme de troisième, l'une des compétences exigibles est : « *construire l'image par une rotation donnée d'un point, d'un cercle, d'une droite, d'un segment et d'une demi-droite* » ; les commentaires correspondants précisent : « *Les activités porteront d'abord sur un travail expérimental permettant d'obtenir un inventaire abondant de figures à partir desquelles seront dégagées des propriétés d'une rotation (conservation des longueurs, des alignements, des angles, des aires). Ces propriétés pourront être utilisées dans la résolution d'exercices simples de construction[...]* »

Le mot « angle orienté » a été introduit en seconde (cf. document d'accompagnement) – en liaison avec l'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique,



avec les rotations (vues en collège) et avec une première observation de l'orientation des figures –, mais aucune compétence n'était exigée en seconde à leur propos. Le terrain est néanmoins prêt pour caractériser un angle orienté de demi-droites ou de vecteurs non nuls, pour les mesurer et présenter la relation de Chasles : on s'appuiera pour cela sur le cercle trigonométrique (en particulier pour souligner la correspondance bijective entre angles orientés et les réels de l'intervalle  $]-\pi, \pi[$ ).

On évitera ici à la fois le formalisme excessif et les confusions préjudiciables à la mise en œuvre ; on acceptera les abus de langage et de notations usuels confondant un angle et l'une de ses mesures, tels  $(Ox, Ox') = \pi$  ou  $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$ , ou  $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  en faisant observer aux élèves à la fois leur intérêt (simplification de l'écriture) et leurs risques (par exemple, lors d'exercices de recherche d'un angle  $\hat{a}$  dont l'angle double mesure  $\alpha$  ou dans l'écriture de suites d'égalités qui aboutiraient, par exemple, à  $\frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$ ). On n'oubliera pas que le souci de rigueur formelle a, dans un passé récent, détourné un certain nombre d'enseignants et d'élèves de l'utilisation régulière de cet objet de base, d'un abord pourtant si naturel et si indispensable dans de nombreuses disciplines. On pourra, selon l'intérêt des classes, envisager une réflexion épistémologique sur la nature des objets angle/mesure (en évoquant les notions de segment, longueur et mesure) et observer le caractère particulier des angles : sans dimension dans les formules des physiciens (ils peuvent en effet être définis comme quotients de deux longueurs : portion de circonférence/rayon), ils sont pourtant mesurés avec une unité. Pour cette dernière, on montrera en quoi le radian est la « bonne » unité pour les mathématiciens ; ceci pourra être signalé lors de la présentation de la dérivée des fonctions sinus et cosinus et de l'illustration de la dérivée de sinus en 0.

Repérage polaire et repérage cartésien sont à relier : les élèves retrouveront ce lien et un mode efficace de travail sur ces notions lors de l'étude des nombres complexes en classe terminale.

Angles orientés et angles géométriques interviennent à de nombreuses reprises dans le programme : lors de la définition du produit scalaire, à l'occasion des formules trigonométriques, dans les calculs de grandeurs géométriques ou la recherche de certains lieux géométriques.

## Barycentre

On définira d'abord le barycentre de deux points pondérés et on étendra cette définition à trois ou quatre points, les coefficients étant toujours numériques (non littéraux). Ce paragraphe sera l'occasion de proposer aux élèves des calculs vectoriels significatifs ; on n'oubliera pas que la place de ces derniers a été notablement réduite en classe de seconde. Comme indiqué dans le programme, on appliquera le barycentre à la recherche d'alignement ou de points de concours dans le plan et l'espace, et l'on évitera toute technicité.

## Produit scalaire dans le plan

La définition attendue est soit celle utilisant la projection orthogonale, soit celle utilisant le cosinus mais les deux formes doivent être connues. On notera que la notion de projection orthogonale n'a jamais été introduite comme telle dans les années antérieures : cela ne doit pas empêcher d'utiliser le mot (comme cela a pu être fait lors de la mise en place du repérage d'un point dans le plan ou dans l'espace, ou bien à propos de perspective cavalière) sans faire de développement théorique sur cette application. La plupart des résultats et applications cités par le programme dans ce paragraphe peuvent être démontrés à ce niveau ; ceci étant fait (selon les modalités, magistrales ou autres, les plus favorables à la compréhension des élèves), la plus grande partie du temps sera consacrée au traitement d'exercices et de problèmes.

On traitera quelques exemples simples de détermination de lieux géométriques à l'aide du produit scalaire (conditions de distances et d'angles, points liés à une configuration mobile, etc.). Mais il n'y a pas à entreprendre en cours une étude systématique

des différentes lignes de niveau :  $M \mapsto \vec{k} \cdot \vec{AM}$ ,  $M \mapsto MA^2 + MB^2$ ,  $M \mapsto MA^2 - MB^2$  ou  $M \mapsto \vec{MA} \cdot \vec{MB}$ .

On mettra en évidence l'apport spécifique du produit scalaire pour les calculs de longueurs, d'aires ou d'angles, sans négliger pour autant les outils vus les années antérieures (les formules reliant les sinus des angles, les côtés et l'aire d'un triangle sont dans le fil de ces outils : elles seront éventuellement introduites dans des problèmes).

## Transformations

Deux familles de transformations sont proposées à l'étude systématique : celle des translations et celle des homothéties. Il est à noter qu'aucune transformation nouvelle n'a été introduite en seconde : les élèves y ont utilisé leurs seuls acquis du collège sur les translations, symétries et rotations dans le plan ; ces transformations étaient perçues avant tout comme agissant sur des figures et non comme des applications ponctuelles du plan sur lui-même.

L'étude demandée des translations et des homothéties sera faite simultanément dans le plan et dans l'espace. Les invariants usuels seront introduits à travers des exercices ou des manipulations faites avec un logiciel de géométrie, avant d'être énoncés avec précision ; comme pour toutes les autres parties du programme, l'enseignant reste libre de démontrer en totalité ou en partie les divers résultats : dans tous les cas, le statut (démonstré ou admis) de chaque énoncé doit toujours être clairement précisé. On peut observer, à ce propos, que certaines réciproques (par exemple, pour montrer que l'image d'une droite est une droite) paraissent inutiles aux yeux de la plupart des élèves : peut-être vaut-il mieux y revenir plus tard lorsque certaines recherches de lieux géométriques auront montré le caractère indispensable de cette réciproque (cf. exemple 1, p. 51).

On soulignera le caractère bijectif des homothéties et des translations (lors de cette première rencontre de la notion de bijection, on gardera une approche intuitive : aucune définition formelle n'est demandée) et on présentera la transformation réciproque.

Là aussi, la plus grande partie du temps sera consacrée au traitement d'exercices et de problèmes. Le programme demande que les transformations (y compris toutes celles utilisées auparavant) soient mises en œuvre, en particulier dans la recherche de lieux géométriques.

## Lieux géométriques

Cette partie est détaillée en annexe (p. 75).

## Généralités sur les fonctions

L'un des objectifs de ce paragraphe est de montrer comment on peut définir de nouvelles fonctions à partir de celles déjà étudiées en classe de seconde ; dans certains cas, on peut conclure rapidement sur leurs variations, dans d'autres non et la recherche de nouveaux outils (en particulier la dérivée) trouve naturellement sa place.

Le terme de polynôme n'est ici introduit que pour permettre de qualifier aisément les fonctions polynômes ; aucun travail algébrique spécifique n'est exigé, si ce n'est la résolution de l'équation du second degré. En particulier, aucune connaissance n'est exigible en matière de factorisation par  $(x - a)$  – sauf dans le cas du trinôme – ou d'unicité de l'écriture polynomiale : celle-ci sera admise en cas de besoin dans certains exercices.

Les contenus cités dans ce paragraphe doivent permettre le développement d'habiletés dans divers domaines : calcul algébrique (lors d'opérations algébriques sur les fonctions), inégalités (sens de variation de  $u + \lambda$ , de  $\lambda u$ , etc.), représentations graphiques, utilisation d'un grapheur, raisonnement (contre-exemple), mise en équation de problèmes, etc.

Aucune étude systématique des variations de  $u + v$  et de  $uv$  à partir de celles de  $u$  et  $v$  n'est demandée ; en revanche, sur quelques exemples, on illustrera la diversité des comportements. On ne perdra pas de vue qu'aucun résultat sur la somme ou le produit d'inégalités n'a été donné en seconde : les exemples traités ici en donneront donc un aperçu.

Comme indiqué dans le programme et explicité plus haut dans ce document (« Mémorisation et automatismes », p. 54), on motivera l'introduction de chaque nouvelle notion ou calcul. Quelques « gammes » calculatoires, déclarées comme telles, devront néanmoins être exécutées, réparties tout au long de l'année, mais en évitant les difficultés gratuites ou les pièges (c'est en réussissant à faire des calculs que les élèves pourront y prendre goût) ; il est, par exemple, indispensable que les élèves acquièrent suffisamment d'aisance dans le traitement du trinôme du second degré pour que celui-ci soit immédiatement disponible lors d'études de variations de fonctions ou d'intersections de courbes.

Pour les représentations graphiques, quelques constructions à la main s'imposent ; on privilégiera néanmoins l'utilisation systématique d'un grapheur (calculatrice graphique ou ordinateur). Le programme demande de justifier les symétries observées ; on pourra utiliser les adjectifs « pair » et « impair », mais aucune connaissance théorique n'est exigée en la matière.

## Dérivée

Le programme cite plusieurs approches possibles de la dérivée. Il suggère d'éviter l'introduction préalable de la notion de limite d'une fonction en un point, et d'adopter au départ un langage intuitif : le nombre dérivé de  $f$  en un réel  $a$  étant, par exemple, ce vers quoi « tend » le rapport  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  quand  $h$  « tend » vers 0. À l'expérience de nombreux enseignants dont c'était déjà la pratique, cette absence d'usage préalable de la notion de limite n'est pas une gêne lors de l'introduction du nombre dérivé ; au contraire, cette irruption de la notion de limite justifie un paragraphe ultérieur de mise au point sur la notion de limite en 0 : l'intuition suffira pour établir un certain nombre de résultats relatifs à la limite quand  $h$  tend vers 0 d'expressions du type  $f(a+h)$  pour des fonctions  $f$  « régulières » (polynômes, rationnelles ou avec radicaux), ainsi qu'à la limite d'une somme, d'un produit ou d'un inverse.

Le programme demande que soient justifiés un certain nombre de résultats. « Justifier » signifie ici « convaincre » (au sens d'« éclairer » et non de « contraindre » par un raisonnement déductif imparable) à l'aide d'arguments calculatoires (calcul du taux d'accroissement de  $1/u$  ou de  $uv$ ), graphiques (pour la monotonie) ou « intuitifs » (pour la limite de  $u(a+h)$  ou le produit de limites).

Ainsi, pour  $1/u$ , il s'agit d'écrire que :

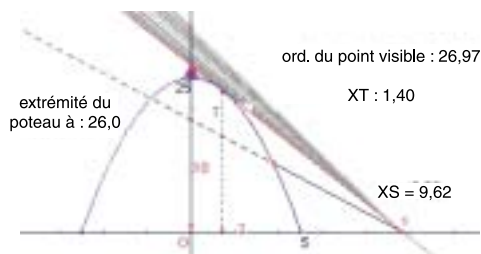
$$\frac{1/u(a+h) - 1/u(a)}{h} = -\frac{u(a+h) - u(a)}{hu(a+h)u(a)}$$

et de conclure en faisant des raisonnements « intuitifs » sur les limites et leurs produits. On trouvera ci-dessous quelques situations permettant soit une approche possible de la notion de dérivée et de tangente, soit un éclairage *a posteriori*.

### Situation 1 (approche) : le terril

(D'après un document du groupe AHA, *Approche heuristique de l'analyse, université de Louvain-la-Neuve, Namur.*)

Au sommet d'un terril de 25 m de haut se trouve planté un bâton de 1 m de haut. On admet que la ligne de pente de ce terril est une portion de la parabole d'équation  $y = -x^2 + 25$ .



À quelle distance du pied du terril faut-il se placer pour apercevoir le bout du bâton de 1 mètre de haut ?

L'illustration ci-dessus représente une modélisation de cette situation et aide les élèves à bien situer le problème.

Placé trop près, on ne pourra pas voir le sommet du bâton. En un point d'abscisse  $s$  de l'axe des abscisses, la direction du regard doit « frôler » le flanc du terril.

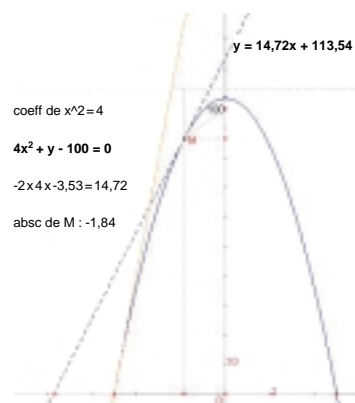
En considérant le point  $H(0; 26)$  qui représente le sommet du bâton et une droite passant par ce point, on est amené à caractériser les différentes possibilités d'intersection de cette droite et de la parabole. La mise en équation donne la condition d'existence de solutions et le cas « limite » d'une seule solution.

### Situation 2 : intersections

Toujours avec la même parabole ou une autre ayant une équation du même type (par exemple, avec celle d'équation  $y = 100 - 4x^2$  pour faire le lien avec la situation du freinage qui sera étudiée ensuite), en divers points d'abscisse connue de cette parabole, on détermine l'équation de la droite ayant un seul point en commun avec la parabole; on compare la valeur des coefficients directeurs de ces droites particulières et les abscisses des points de « contact ». On calcule le coefficient directeur en fonction de l'abscisse  $x_0$  du point de contact.

On peut faire le lien avec le calcul de ce même coefficient directeur en prenant une sécante passant par les points d'abscisses  $x_0$  et  $x_0 + h$  en s'appuyant sur une approche intuitive de la limite lorsque  $h$  tend vers 0.

Il est intéressant alors de mettre en évidence une propriété utile pour construire très simplement n'importe quelle tangente : on calcule l'ordonnée du point d'intersection  $T$  de la tangente avec l'axe des ordonnées, celle du sommet  $S$  de la parabole, celle du point de contact  $M$  et on établit ainsi que  $S$  est le milieu du segment joignant ce point  $T$  au projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe des ordonnées.



### Situation 3 : quelle vitesse instantanée ?

*La situation ci-dessous est le compte-rendu d'un travail effectivement réalisé dans une classe ; c'est sur proposition des élèves que l'on s'est orienté vers la dérivée symétrique : il est bien sûr inutile de l'amener artificiellement. Dans le cas où l'enseignant aboutit à un déroulement analogue dans sa classe, celui-ci pourra faire observer que c'est la méthode utilisée par un certain nombre de calculatrices et que le rapport tend plus vite vers une valeur limite que celui de la définition classique.*

Les élèves connaissent bien la notion de vitesse moyenne et savent la définir (distance parcourue/temps de parcours) ; l'expérience de la voiture fait que chacun a aussi l'intuition d'une vitesse instantanée : comment définir cette deuxième notion ?

La démarche suivante peut être proposée (en liaison avec l'étude de la chute des corps faite en physique).

Soit un mobile dont la distance à un point origine est donnée en fonction du temps par la fonction  $d : t \mapsto t^2$ .

On sait calculer la vitesse moyenne entre les instants 1 et 2, 1 et 3, 2 et 5, etc.

On constate que la vitesse moyenne entre les instants  $t$  et  $t+1$  augmente quand  $t$  augmente. Comment définir une vitesse à l'instant 2 ? Le calcul de la vitesse moyenne entre deux instants symétriques par rapport à 2 (1 et 3 ; 1,5 et 2,5 ; 1,9 et 2,1 ; 1,99 et 2,05; etc.)

amène à s'intéresser à un quotient du type  $\frac{(2+h)^2 - (2-h)^2}{2h}$  qui vaut toujours 4 ! D'où une première méthode pour trouver la vitesse instantanée.

Le choix d'une autre fonction,  $d : t \mapsto t^3$ , par exemple, et les mêmes calculs à l'instant 2 amènent à considérer le quotient  $\frac{(2+h)^3 - (2-h)^3}{2h} = 12 + h^2$  et envisager ce qui se passe quand  $h$  prend des valeurs égales à 0,1, puis 0,01, puis 0,001, etc.

On aborde ici pour la première fois la notion de « tend vers » ; il serait dommage d'arrêter le travail en cours pour parler de limites (leur intérêt n'apparaîtra que plus tard) ; on en restera à un vocabulaire très intuitif : «  $12 + h^2$  tend vers 12 quand  $h$  tend vers 0 » ; d'où la vitesse instantanée à l'instant 2.

### Traduction graphique

Après avoir représenté chacune des fonctions  $d$  précédentes, on peut demander aux élèves de lire graphiquement les vitesses moyennes calculées précédemment et de procéder à une première association intuitive entre « pente » de la courbe et « vitesse ». Le passage de vitesse moyenne à vitesse instantanée opéré plus haut se traduit alors par une recherche de position limite de sécante, que l'on convient d'appeler tangente à la courbe au point d'abscisse 2.

Ces deux situations (vitesse instantanée et tangente) justifient l'introduction d'un mot nouveau : le nombre dérivé de  $f$  en  $a$ , défini comme le nombre vers lequel « tend »  $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$  quand  $h$  « tend » vers 0 ( $h$  restant positif) ; ce nombre caractérisera désormais la vitesse instantanée ou la pente de la tangente.

Un tel nombre est-il toujours calculable pour les fonctions déjà connues (polynômes de degré inférieur à 3,  $x \mapsto \sqrt{ax+b}$ ) ?

Confrontation à la fonction valeur absolue, en 0 : pas de tangente et pourtant un « nombre dérivé ».

D'où la recherche d'une nouvelle définition rompant apparemment avec la « symétrie » conservée jusque-là et l'utilisation (tant pour la recherche d'une vitesse instantanée que pour celle de la tangente) du rapport :  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ .

Effet sur les calculs précédents (complication ou simplification ?),  $h$  pouvant être positif ou négatif, on ne perd pas la « symétrie » évoquée plus haut.

Utilisation éventuelle de l'expression « limite de  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$  ».

Introduction de la fonction dérivée.

### Situation 4 : freinage

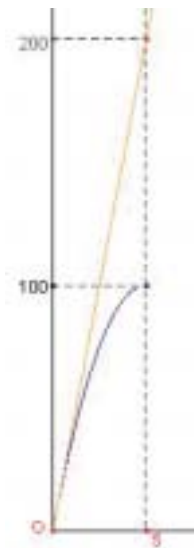
Supposons que lors d'un freinage, la décélération d'une voiture soit constante en fonction du temps et que la distance parcourue par la voiture à partir de l'instant de freinage s'exprime alors par une expression de la forme :

$d = -kt^2 + v_0 t$ . Ainsi, pour une voiture roulant à une certaine vitesse et s'arrêtant en 5 s sur une distance de 100 m, on a obtenu :

$$d = -4(t-5)^2 + 100.$$

À partir de là, on peut se poser quelques questions :

- à quelle vitesse roulait la voiture juste avant le début du freinage ?
- quelle distance aurait parcouru cette même voiture dans le même laps de temps de 5 s si elle n'avait pas freiné ?
- à quelle vitesse arrive-t-elle sur un obstacle situé à 50 m du début du freinage ? à 80 m ?

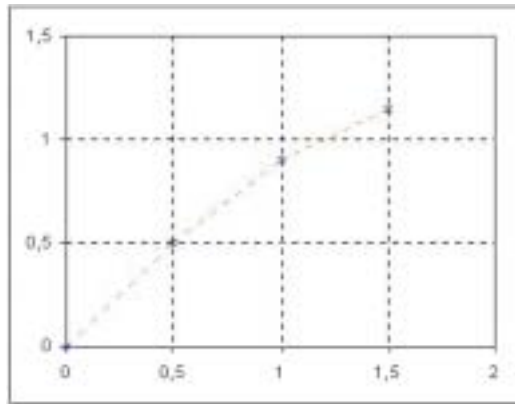


## Méthode d'Euler

À propos de l'item du programme : « on construira point par point un ou deux exemples d'approximation de courbe intégrale définie par :  $y' = f(t)$  et  $y(t_0) = y_0$  en utilisant l'approximation  $\Delta f \approx f(a) \Delta t$  », on considère par exemple la fonction  $f$  définie par :  $t \mapsto f(t) = \frac{1}{1+t^2}$  et on souhaite construire point par point une approximation de la fonction  $F$  vérifiant :  $F'(t) = f(t)$  et  $F(0) = 0$ .

En classe de première on ne pourra pas démontrer l'existence d'une telle fonction mais on signalera que ce problème sera abordé en terminale.

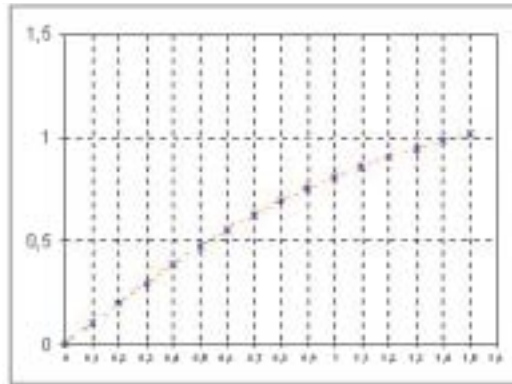
Sur papier millimétré, on approche successivement  $F(0,5)$  et  $F(1)$ .  
 On a :  $F(0,5) - F(0) \approx 0,5 F'(0)$ , soit :  $F(0,5) - F(0) \approx 0,5 f(0)$ . Ainsi,  $F(0,5) \approx 0,5$ .



On réitère à partir de  $F(0,5)$  :  $F(1) - F(0,5) \approx 0,5 f(0,5)$ , etc.

Au tableur, on peut affiner le pas  $h$  en exploitant les coordonnées définies par les relations de récurrence suivantes :  $x_n = nh$  et  $y_{n+1} = y_n + h \times \frac{1}{1 + (nh)^2}$ .

Ci-dessous une représentation graphique pour  $h = 0,1$ .



Ce travail prépare la méthode d'Euler sur les équations différentielles qui permet de représenter des approximations de solutions d'équations différentielles sans les avoir déterminées analytiquement.

On trouvera sur ce sujet une animation plus élaborée sur le cédérom joint.

## Limites et comportement asymptotique

La notion de limite apparaît à deux reprises dans le programme : à propos de la dérivée et lors de l'étude du comportement asymptotique de certaines fonctions.

Comme déjà dit plus haut pour l'introduction de la dérivée, l'intuition suffira pour établir que  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$  pour les fonctions  $f$  « régulières » (polynômes, rationnelles ou avec radicaux).

On fera observer aux élèves que cela correspond à un tracé de la courbe représentant la fonction sans lever le crayon (le terme de fonction continue sera introduit en terminale : il peut néanmoins déjà être utilisé ici de façon naïve). Dans tous les calculs de dérivée, on aboutit – après simplification par  $h$  – à ce type de fonction. Comme d'habitude, on ne soulèvera aucune difficulté sur la présence sous-jacente d'un prolongement en 0 du taux d'accroissement simplifié par  $h$ .

On ne s'intéresse au comportement à l'infini que pour des fonctions polynômes de degré au plus 3 ou des fonctions rationnelles simples (voir programme) ; on s'appuiera là aussi sur l'intuition. À partir de manipulations numériques (en donnant à  $x$  des valeurs successivement égales à  $10^3$ ,  $10^6$ ...) et de représentations graphiques, on donnera la limite en  $+\infty$  ou en  $-\infty$  des fonctions de référence  $x$ ,  $x^2$ ,  $x^3$ ,  $\frac{1}{x}$ , etc.



On observera très vite que le comportement asymptotique d'un polynôme (respectivement d'une fonction rationnelle) est donné par son terme de plus haut degré (resp. par le quotient de ses termes de plus haut degré). Ces observations donneront lieu à la mise au point de règles opératoires, suffisantes pour toutes les études exigibles de comportement asymptotique, et l'obtention des droites asymptotes « horizontales » ou « obliques ». La représentation graphique de la fonction inverse faite en seconde donne une première approche de la limite de  $\frac{1}{x}$  quand  $x$  tend vers 0 par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures et de la notion d'asymptote « verticale » ; en première, on s'appuiera sur quelques manipulations numériques pour établir que si le numérateur tend vers un réel non nul et le dénominateur vers 0, alors le quotient tend vers l'infini, le signe étant à préciser.

À l'occasion de l'une de ces recherches de limite (dérivée, à l'infini ou en une borne finie pour une fonction rationnelle), on mentionnera les règles opératoires usuelles pour la limite d'une somme ou d'un produit.

## Fonctions disponibles pour la classe terminale

Les études de fonctions seront orientées vers la résolution d'un problème, la recherche d'un extremum, d'un encadrement, etc. Un certain nombre d'acquis devront néanmoins être disponibles pour la classe terminale.

À l'issue de la classe de première, les élèves devront savoir étudier les variations et les limites aux bornes d'un intervalle de définition d'une fonction polynôme de degré au plus 3 et d'une fonction rationnelle simple (avec mise en évidence de ses asymptotes). Pour les fonctions irrationnelles, les élèves devront savoir calculer la dérivée d'une fonction du type  $\sqrt{ax+b}$  et étudier ses variations, la représentation graphique pouvant s'en déduire ou être obtenue à l'aide d'un grapheur en passant de  $\sqrt{x}$  à  $\sqrt{ax+b}$ . Aucune étude de limite n'est exigée (la notion intuitive de continuité suffisant pour les limites donnant accès au nombre dérivé).

Pour les fonctions trigonométriques, les élèves devront savoir calculer les dérivées des fonctions sinus et cosinus, et d'éventuelles autres fonctions simples construites à partir de celles-ci, mais on évitera les exercices de calcul artificiels. Les fonctions sinus et cosinus ont été représentées en classe de seconde ; en liaison avec le travail sur les angles orientés, on définira la périodicité de ces fonctions. On étudiera sur un grapheur le passage de la représentation de sinus ou cosinus à celle d'une fonction qui s'en déduit simplement ; on étudiera quelques exemples très simples de fonctions pour lesquelles on peut, par lecture sur le cercle trigonométrique, conclure quant aux zéros ou au signe de la dérivée sur l'intervalle  $]-\pi, \pi]$  (comme la fonction  $\cos^2 x$  ou  $\cos^2 x - \cos x$ ).

## Suites

L'étude des suites arithmétiques et géométriques inclut naturellement le calcul de la somme des  $n$  premiers termes ; ce calcul fait partie intégrante de l'étude de ces suites dans une section scientifique.

On ne soulèvera pas de difficultés formelles en classe de première sur la notion de raisonnement par récurrence. La définition d'une suite par récurrence, l'éventuelle identification de deux suites ayant le(s) même(s) premier(s) terme(s) et vérifiant la même relation de récurrence, seront autant d'occasions de se familiariser avec ce nouveau concept mathématique : celui-ci sera formalisé en classe terminale.

En première, on étudie surtout l'évolution « en temps fini » des termes d'une suite, la limite jouant le rôle d'un « point sur la ligne d'horizon », point qu'il convient de regarder pour ne pas se tromper complètement de direction. Le travail sur les suites sera d'abord d'en reconnaître un peu partout (en géométrie comme en dehors du champ des mathématiques) – cf. l'annexe sur les suites. À l'occasion de ce travail, l'élève se sensibilisera aux critères de lecture des résultats fournis par des calculatrices ou des ordinateurs : monotonie, oscillations, stationnarité, rapidité de convergence, etc. (le cas échéant, tous ces termes seront utilisés dans un sens intuitif, sans définition for-

melle); cette lecture sera complétée par des calculs algébriques (encadrements, formules à établir).

Il y a lieu, pour ces exemples de suites, d'utiliser largement les possibilités des tableurs et calculatrices. Par ailleurs, l'étude des suites est un terrain propice pour comprendre la nécessité et l'efficacité de faire des allers et retours entre l'ordinateur ou la calculatrice et le « papier-crayon ». Comme il est indiqué dans le programme, on fera construire ici un ou plusieurs exemples de programme avec boucle et test : par exemple, recherche du premier entier  $n$  tel que  $u_n < (1/2) u_0$  (ou  $|u_n| < (1/2) |u_0|$  ou  $u_n < 2u_0 \dots$ ). Un autre exemple se prêtant particulièrement à un problème de boucle et test et représentant un problème encore ouvert, est celui de la suite de Syracuse ( $u_n$ ) définie à partir d'un entier  $u_0$  par  $u_{n+1} = u_n / 2$  si  $u_n$  est pair et  $u_{n+1} = 3 u_n + 1$  (sinon, on peut inclure un arrêt si  $u_n = 1$  et faire afficher le nombre de pas nécessaires pour parvenir à cet arrêt).

Le programme indique qu'une définition de la convergence d'une suite doit être donnée. L'objectif de l'introduction de cette définition est de :

- montrer qu'à l'intérieur du champ des mathématiques, il existe une définition précise et relativement complexe à partir de laquelle on établit des propriétés et des théorèmes (théorème des « gendarmes », par exemple) qui permettent d'éviter de recourir à cette définition complexe ;
- proposer un travail de nature épistémologique sur la façon dont s'élaborent les mathématiques : on pourra signaler, en s'appuyant sur des éléments historiques, que les mathématiques ont beaucoup avancé sans définition précise de la notion de limite de suite ou de fonction mais qu'à un moment, quand la notion intuitive s'avère buter sur des difficultés, il devient nécessaire de l'explicitier et de l'introduire comme nouvelle notion mathématique ;
- travailler un ou deux exemples de suites divergentes très simples (c'est l'occasion d'un travail de logique sur la définition) ;
- montrer par un exemple qu'on ne peut pas conclure pour la limite à partir de ce que l'on observe sur un écran d'ordinateur.

L'objectif n'est en aucun cas de tout compliquer par une définition dont on ne comprend pas la nécessité, ou d'essayer subrepticement de « couper des  $\varepsilon$  en quatre ».

## Statistique et probabilités

Cette partie est détaillée en annexe (p. 67).



## STATISTIQUE ET PROBABILITÉS

En classe de seconde, les élèves ont été sensibilisés à la fluctuation d'échantillonnage dans des cas simples correspondant à des expériences aléatoires dont le résultat ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs ; ils ont fait et simulé des expériences liées à des choix de chiffres au hasard : ces expériences et ces simulations ont en principe été consignées dans un cahier de statistique (dans de tels cahiers, les élèves ont écrit pourquoi telle expérience est faite, ce que l'on observe, des explications éventuelles de ce qui est observé, et fait le lien entre diverses expériences et simulations). Les élèves ont ainsi observé des résultats qui appellent une explication. De telles explications relèvent des mathématiques, mais nécessitent de formaliser et de préciser dans le cadre d'une théorie (celle des probabilités) le langage utilisé pour parler de l'aléatoire. Le programme de *Probabilités-Statistique* de la série S introduit les notions de loi de probabilité et de variable aléatoire, notions indispensables pour comprendre l'esprit de la statistique et aborder la problématique propre à cette discipline ; quelques éléments de statistique descriptive sont introduits, mais celle-ci a une part modeste dans cette série. La terminologie en usage pour la statistique et les probabilités sera réduite au minimum ; on s'efforcera de garder le langage ensembliste et de ne pas développer deux terminologies parallèles : on introduira seulement le terme « événement » ; l'ensemble des éventualités liées à une expérience gardera le nom d'« ensemble », on parlera d'« événements complémentaires » ou d'« événements disjoints » (s'ils sont utilisés, les termes d'« univers », d'« événements contraires » ou « incompatibles » ne seront pas systématisés). L'important est de savoir résoudre des problèmes, de relier les résultats de calculs faits sur des observations aux questions posées. On trouvera en fin de cette annexe un lexique des principaux termes liés à la statistique et que l'élève doit connaître.

### Statistique descriptive

Quelques éléments de statistique descriptive sont présentés pour les séries numériques : écart type et diagramme en boîte (cf. annexe commune aux séries ES, L et S, p. 83). Il est important ici de démontrer que la moyenne minimise la fonction  $x \mapsto \frac{1}{n} \sum_i (x_i - x)^2$  qui mesure la dispersion autour d'un point, et que ce minimum est appelé variance. Les diagrammes en boîte permettent une comparaison graphique de plusieurs séries de données (voir fiche « Sondages » du document d'accompagnement de seconde) ; on remarquera à l'aide d'exemples que le résumé d'une série par le couple (médiane, écart interquartile) n'est pas sensible aux valeurs extrêmes et ne peut faire l'objet de calculs par paquets. Résumer une série de données par moyenne, écart type a des propriétés théoriques qui rendent son usage fréquent, notamment en biologie et physique pour ce qui touche aux mesures expérimentales. On regardera comment se transforment les quantités introduites si on change les unités et/ou si on décale l'origine ; les résumés numériques déterminés à partir de la distribution des fréquences sont aussi affectés par la fluctuation d'échantillonnage. On peut observer par simulation de  $p$  séries de taille  $n$  d'une même expérience que la variance  $s_g$  de la série des  $p$  moyennes est plus petite que la variance des  $np$  données (ou plus simplement situer  $s_g$  dans la série des  $p$  variances des séries) : la moyenne d'une série est une quantité variable, mais « moins variable » que les données elles-mêmes. On notera que la moyenne d'une série de données étant l'isobarycentre des termes et le barycentre des valeurs prises pondérées par les fréquences, elle bénéficie de la propriété d'associativité des barycentres et permet donc les calculs par sous-groupes. La variance permet aussi les calculs par sous-groupes ; la formule de décomposition de la variance ci-dessous n'est pas au programme et figure ici à l'usage des enseignants :

« Soit une série de  $n$  données, de moyenne  $m$  et de variance  $s^2$ , décomposée en  $k$  sous-séries de tailles respectives  $n_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Soit  $m_i$  et  $s_i^2$  les moyennes et les

variances dans chaque sous-série ; alors  $s^2$  est la somme de la moyenne des variances  $s_i^2$  pondérées par les  $n_i/n$  et de la variance de la série des  $m_i$  affectés des poids  $n_i/n$  :

$$s^2 = \sum \frac{n_i}{n} (m_i - m)^2 + \sum \frac{n_i}{n} s_i^2$$

On a souvent prôné, pour l'enseignement de la statistique, le recueil de données par les élèves eux-mêmes : ce recueil est considéré comme motivant et permettant de percevoir le champ de l'aléatoire. Or, la perception de l'aléatoire s'acquiert aujourd'hui aussi par la simulation et les paramètres de dispersion introduits peuvent être calculés sur des séries simulées. Un recueil effectif de données par les élèves n'est donc à envisager que s'il ne prend pas beaucoup de temps et traite d'une question que les élèves ont fortement contribué à formuler. Par ailleurs, pour de nombreuses questions abordables dans le cadre du lycée, des données existent : elles sont réactualisées régulièrement, leur contenu est riche, elles sont accessibles dans des banques de données et on pourra les utiliser. Il est préférable de n'étudier qu'un seul exemple motivant plutôt que de petits exemples dont le traitement se réduit à des calculs numériques sans objet. Si on veut traiter de grandes séries de données, on fournira aux élèves des résultats numériques complets ou partiels (il suffit de donner la somme des termes et la somme de leurs carrés) ; l'important ici n'est pas de faire systématiquement des calculs soi-même ni d'être virtuose de l'emploi des touches statistiques d'une calculatrice ou du tableur. L'objectif reste toujours de savoir quelle question ou étude a motivé de traiter des données, de comprendre les calculs et de savoir interpréter les résultats.

## Probabilité, modélisation, simulation

Le programme de probabilité du cycle terminal de la série S concerne la modélisation d'expériences de référence, modélisation définie par la loi de probabilité équirépartie sur un ensemble fini convenablement choisi. Les lois de probabilité non équiréparties rencontrées en première et terminale sont le plus souvent l'image par une variable aléatoire d'une loi équirépartie, et on introduira donc presque simultanément la notion de loi de probabilité et celle de variable aléatoire.

### Loi de probabilité

On recensera les propriétés mathématiques élémentaires de l'objet « distributions de fréquences » (cf. tableau ci-dessous) et on définira une loi de probabilité comme un objet mathématique ayant les mêmes propriétés.

Distribution de fréquences sur $E = \{x_1, \dots, x_r\}$	Loi de probabilité sur $E = \{x_1, \dots, x_r\}$
$(f_1, \dots, f_r)$ $f_i \geq 0$ ; $\sum f_i = 1$ $A \subset E$ , fréquence de $A$ : $f(A) = \sum_{x_i \in A} f_i$ Événement complémentaire : $f(\bar{A}) = 1 - f(A)$ Événements $A$ et $B$ disjoints : $f(A \cup B) = f(A \text{ ou } B) = f(A) + f(B)$ Cas numérique : Moyenne empirique : $\bar{x} = \sum f_i x_i$ Variance empirique : $s^2 = \sum f_i (x_i - \bar{x})^2$ Écart type empirique : $s = \sqrt{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}$	$(p_1, \dots, p_r)$ $p_i \geq 0$ ; $\sum p_i = 1$ $A \subset E$ , probabilité de $A$ : $P(A) = \sum_{x_i \in A} p_i$ Événement complémentaire : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ Événements $A$ et $B$ disjoints : $P(A \cup B) = P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$ Cas numérique : Espérance d'une loi $P$ : $\mu = \sum p_i x_i$ Variance d'une loi $P$ : $\sigma^2 = \sum p_i (x_i - \mu)^2$ Écart type d'une loi $P$ : $\sigma = \sqrt{\sum p_i (x_i - \mu)^2}$

Modéliser une expérience aléatoire, c'est lui associer une loi de probabilité.

Une fréquence est empirique : elle est calculée à partir de données expérimentales alors que la probabilité d'un événement est un « nombre théorique ». Les distributions de fréquences issues de la répétition d'expériences identiques et indépendantes varient (fluctuent) ; la loi de probabilité est un invariant associé à l'expérience.

L'objectif est que les élèves comprennent à l'aide d'exemples (cf. « Modélisation d'expériences de référence », p. 15) que modéliser, c'est ici choisir une loi de probabilité. Il ne s'agit en aucun cas d'avoir des discours généraux sur les modèles et la modélisation. Les élèves devront bien distinguer ce qui est empirique (du domaine de l'expérience) de ce qui est théorique ; en particulier, on réservera la lettre grecque  $\sigma$  à l'écart type d'une loi et on évitera de noter avec cette même lettre un écart type empirique (il s'agit là de règles de notations internationales).

En classe de première, une loi de probabilité  $P$  sur un ensemble fini est la liste des probabilités des éléments de  $E$  ; à partir de cette liste, on définit naturellement les probabilités d'événements (c'est-à-dire implicitement une application de  $\mathcal{P}(E)$  dans  $[0 ; 1]$ , application qui sera encore désignée par  $P$ ) et on fera remarquer que  $P(E) = 1$  et que  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  pour des événements disjoints.

Il est inutilement complexe, pour le cas des ensembles finis, de partir d'une application de  $\mathcal{P}(E)$  dans  $[0 ; 1]$ , vérifiant certains axiomes, puis de montrer ensuite que cette application est entièrement caractérisée par  $(p_1, \dots, p_r)$ . Le fait de ne pouvoir simplement généraliser aux ensembles continus cette définition et la nécessité d'une définition ensembliste seront abordés en terminale.

Si tous les éléments d'un ensemble  $E$  ont même probabilité, la loi de probabilité est dite équirépartie ; dans ce cas, la probabilité d'un événement est le quotient de son nombre d'éléments par le nombre d'éléments de l'ensemble.

On évitera tout développement théorique sur le langage des événements et le calcul ensembliste qui en découle : ces notions et la pratique de la logique qu'ils impliquent (étude du complémentaire de l'événement «  $A$  ou  $B$  », ou de l'événement «  $A$  et  $B$  ») s'acquièrent au fil d'exercices.

L'expression « choisir au hasard » (respectivement « selon une loi de probabilité  $P$  ») un élément dans un ensemble fini  $E$  est admise et a même sens que : « on considère la loi de probabilité équirépartie sur  $E$  (resp. la loi de probabilité  $P$  sur  $E$ ) ». Par exemple, pour parler du modèle associé au lancer d'un dé, on dira que l'on choisit un nombre au hasard dans  $\{1, \dots, 6\}$ .

## Variable aléatoire

Une application  $T$  de  $E$  dans  $E'$  ( $E$  et  $E'$  finis) permet de transporter la loi  $P$  définie sur  $E$  en une loi  $P'$  définie sur  $E'$  par le procédé suivant :

$$P'(x') = P(T = x')$$

où  $P(T = x')$  désigne la probabilité de l'ensemble des éléments de  $E$  dont l'image par  $T$  est  $x'$  (cet ensemble est souvent noté  $\{T = x'\}$ , on écrit en fait  $P(T = x')$  au lieu de  $P(\{T = x'\})$ ).

On montrera sur des exemples que même si la loi  $P$  est équirépartie, la loi transportée  $P'$  par  $T$ , appelée loi de  $T$ , n'est en général pas l'équiprobabilité.

Dans ce cadre-là, ce qui nous intéresse dans l'application  $T$ , c'est ce qui se passe à l'arrivée : partant d'un élément  $x$  choisi dans  $E$  selon la loi  $P$ , on arrive à un élément  $x'$  choisi dans  $E'$  selon la loi  $P'$ . Pour nommer  $T$ , on parle habituellement de variable aléatoire.

Dans le cas numérique, l'espérance et la variance de la loi  $P'$  sont appelées plus simplement espérance de  $T$  (notée  $E(T)$ ) et variance de  $T$ .

Le programme parle à deux reprises d'espérance, de variance et d'écart type (pour les lois de probabilité et les variables aléatoires) : il s'agit dans les deux cas de la même notion. L'objectif n'est pas de faire des calculs d'espérance et de variance sans objet, mais de généraliser au plan théorique les paramètres empiriques de tendance centrale et de dispersion rencontrés dans l'étude de séries de données.

Le programme n'évoque pas la linéarité de l'espérance ni le lien entre l'écart type de  $(aX + b)$  et de  $X$  : l'étude faite en statistique (linéarité en classe de seconde, influence d'une transformation affine sur l'écart type en classe de première) suffira pour justifier ici leur utilisation.

*Remarque* : on ne définit une loi de probabilité que sur un ensemble fini. Cet ensemble sera le plus souvent un ensemble de nombres, et l'on pourra ainsi définir l'espérance, la variance et l'écart type de cette loi. Les exemples où l'ensemble n'est pas numérique (couleur d'une carte, par exemple) ne sont pas pour autant exclus. Dans ce cas, on ne peut pas définir l'espérance.

## Exercices

• On considère une population de dix hommes et de dix femmes d'un club de jeux (échecs, bridge ou go...). On considère qu'une femme et un homme sont partenaires s'ils ont joué au moins une partie d'échecs ensemble. Une femme est partenaire avec les dix hommes, une autre femme avec deux hommes et les huit autres ne sont partenaires d'aucun homme.

On fait un sondage de taille 2 parmi les femmes, c'est-à-dire que l'on choisit au hasard un couple parmi les couples de femmes, et on lui associe la demi-somme de leur nombre de partenaires (hommes). Calculer la loi de probabilité  $P$  de la variable aléatoire  $X$  « demi-somme », son espérance et sa variance.

On fait un sondage de taille 2 parmi les hommes, c'est-à-dire que l'on choisit au hasard un couple parmi les couples d'hommes et on lui associe la demi-somme de leur nombre de partenaires (femmes). Calculer la loi de probabilité  $P'$  de la variable aléatoire  $Y$  « demi-somme », son espérance et sa variance.

On notera que la probabilité du résultat 0 est 0,62 pour les femmes et que la probabilité du résultat 1 est 0,62 pour les hommes. Faire une simulation pour estimer la probabilité, quand on choisit un couple au hasard chez les femmes et un couple au hasard chez les hommes, d'obtenir (0,1) comme résultat.

La variable aléatoire  $X$  est définie sur l'ensemble des 45 couples de femmes muni de la loi équirépartie (on choisit un couple au hasard) et prend les valeurs 0, 1, 5, 6 avec les probabilités respectives (28/45, 8/45, 8/45, 1/45) soit, approximativement : 0,62 ; 0,18 ; 0,18 ; 0,02. L'espérance de  $X$  est 1,2 (on retrouve le nombre moyen de relations de la population des dix femmes), la variance de  $X$  est 3,98.

La variable aléatoire  $Y$  est définie sur l'ensemble des 45 couples d'hommes muni de la loi équirépartie (on choisit un couple au hasard) et prend les valeurs 1 ; 1,5 ; 2 avec les probabilités respectives (28/45, 16/45, 1/45) (soit, approximativement : 0,62, 0,36, 0,02). L'espérance de  $Y$  est 1,2 (on retrouve le nombre moyen de relations de la population des dix hommes et de plus que l'espérance de  $X$  et  $Y$  doivent être les mêmes), la variance de  $Y$  est 0,07.

Si on simule des choix de couples d'hommes et de femmes au hasard, on verra que dans environ 35 % des cas,  $X$  vaut 0 et  $Y$  vaut 1.

• Quel jeu choisir dans un casino où l'on peut jouer aux jeux suivants :

Jeu A : on choisit un chiffre selon une loi de probabilité telle que la probabilité du chiffre  $i$  est proportionnelle à  $i + 1$ . Le gain associé au chiffre  $i$  est  $2\,000/(i + 1)$ .

Jeu B : on choisit un chiffre selon une loi de probabilité telle que la probabilité du chiffre  $i$  est proportionnelle à  $1/(i + 1)$ . Le gain associé au chiffre  $i$  est  $100(i + 1)$ .

## Modélisation d'expériences de référence

Modéliser une expérience aléatoire, c'est associer à cette expérience un ensemble et une loi de probabilité sur cet ensemble. Ce choix, c'est-à-dire la modélisation de l'expérience, est en général délicat, sauf dans certains cas où des considérations propres au protocole expérimental conduisent à proposer *a priori* un modèle. Il en est ainsi des lancers de pièces ou de dés pour lesquels des considérations de symétrie conduisent au choix d'un modèle où la loi de probabilité est équirépartie. On se restreindra donc aux expériences de référence en évitant tout discours général sur ce qu'est ou n'est pas la modélisation.

La traduction mathématique de « une pièce a autant de chances de tomber sur pile que sur face » est ainsi : « la probabilité de pile et de face sont égales ». On précisera clairement que les termes *équilibré* et *choix au hasard* indiquent par convention un choix du modèle de l'expérience où la probabilité est équirépartie.

En dehors de tels cas où des considérations quant à la nature des expériences permettent de proposer un modèle, le choix d'un modèle à partir de données expérimentales ne sera pas abordé dans l'enseignement secondaire. On se contentera, si nécessaire, de fournir un modèle en indiquant que des techniques statistiques ont permis de déterminer et de valider un tel modèle.

La modélisation ne relève pas d'une logique du vrai et du faux. Un modèle n'est ni vrai ni faux : il peut être validé ou rejeté au vu de données expérimentales. Une des premières fonctions de la statistique dite inférentielle est d'associer à une expérience aléatoire un modèle ou une gamme de modèles compatibles (en un certain sens à définir) avec les données expérimentales dont on dispose, et de définir des procédures de validation.

Pour valider un modèle probabiliste, le premier outil dont on dispose est un **théorème de mathématiques** appelé « loi (forte) des grands nombres », dont un énoncé intuitif est : *Dans le monde théorique défini par une loi de probabilité  $P$  sur un ensemble fini, les fréquences des éléments de cet ensemble dans une suite de  $n$  expériences identiques et indépendantes « tendent » vers leur probabilité quand  $n$  augmente indéfiniment.*

Ou encore :

*Si on choisit  $n$  éléments selon une loi de probabilité  $P$ , indépendamment les uns des autres, alors la distribution des fréquences est voisine de  $P$  lorsque  $n$  est grand.*

Pour les enseignants

Il s'agit là d'un énoncé vulgarisé. Pour être un peu plus précis, le théorème appelé *loi forte des grands nombres* dit que, dans l'ensemble, des suites infinies d'éléments choisis selon  $P$ , le sous-ensemble des suites pour lesquelles la distribution des fréquences ne converge pas vers  $P$  est « négligeable ». Par exemple, dans une suite finie de  $n$  lancers d'une pièce équilibrée, on peut n'obtenir que des faces (code 0) ou que des piles (code 1), ou 001001...001, etc. ; ces trois suites finies ont chacune une probabilité  $2^{-n}$  ; si on « prolonge » ces suites, les fréquences de 1 et de 0 ne tendent pas vers  $1/2$ , mais la probabilité de l'ensemble de ces trois suites tend vers 0. Le théorème ci-dessus indique que l'ensemble de toutes les suites imaginables pour lesquelles les fréquences ne tendent pas vers 0,5 est de « probabilité nulle » – pour une loi de probabilité construite sur l'ensemble des suites infinies de 0 et de 1 à partir de l'équiprobabilité sur  $\{0 ; 1\}$ . Le mathématicien dira qu'il y a convergence presque sûre des fréquences des éléments vers leur probabilité. Le statisticien, s'il observe dans une longue série d'expériences des distributions de fréquences qui fluctuent de moins en moins, choisira comme modèle, en vertu de cette loi des grands nombres, une loi de probabilité « proche » de la dernière distribution observée.

Une validation du modèle de la loi équirépartie pour le lancer d'un dé consistera à vérifier que la distribution des fréquences est « proche » de  $(1/6, \dots, 1/6)$  sur  $\{1, \dots, 6\}$  quand le nombre de lancers est grand : cela sera traité en classe terminale.

Exercice

Un petit bac peut, en plus des voyageurs, transporter une seule voiture à la fois pour aller dans une île. Il faut réserver et payer la veille ; en cas de désistement, le propriétaire du bac ne rembourse que la moitié du prix du billet. On estime qu'en période estivale, une proportion stable  $p$  des réservations donne lieu à un désistement. Comme il y a toujours au moins deux demandes de réservation par trajet, le propriétaire se demande s'il n'aurait pas intérêt à prendre deux réservations pour chaque trajet : s'il n'y a pas de désistement, il prend une voiture et fait transporter à ses frais l'autre par un confrère dont le prix de passage est double du sien.

Pour quelles valeurs de  $p$  a-t-il intérêt, à long terme, à prendre ce système de surréservation ?

Ce problème pourra être repris en terminale, quand les élèves auront vu la loi binomiale, dans des cas plus complexes.

## Remarques à l'usage des enseignants

À propos des termes « loi de probabilité » et « espérance d'une loi de probabilité »

Nous avons choisi pour l'enseignement secondaire d'employer le terme de loi de probabilité sur un ensemble, que celle-ci soit ou non la loi d'une variable aléatoire.

On parle ainsi d'une loi de probabilité, de la probabilité d'un événement ou d'un élément, mais le terme de probabilité, seul, n'est pas défini à ce niveau d'étude.

Dans les livres de probabilité, on parle d'espérance d'une variable aléatoire et de moyenne ou de moment d'ordre 1 d'une loi de probabilité ; nous ne parlons que d'espérance, que ce soit pour une loi de probabilité ou pour une variable aléatoire. Le terme espérance marque bien pour l'élève la différence avec moyenne (empirique),

mais il convient de ne pas se livrer à une guerre des mots : un élève qui emploierait le terme moyenne ou moyenne théorique d'une loi de probabilité en ayant compris le concept ne doit pas être sanctionné.

#### À propos de la notion d'échantillon d'une expérience

Dans le document d'accompagnement de seconde (page 11), on dit qu'un échantillon de taille  $n$  d'une expérience est la série  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  des résultats obtenus en faisant  $n$  fois la même expérience. Si le modèle associé à une expérience est le choix d'un élément d'un ensemble  $E$  selon une loi de probabilité  $P$ , le modèle associé à un échantillon de taille  $n$  de cette expérience est une liste de  $n$  variables aléatoires  $(X_1, \dots, X_n)$ , qui sont les projections de  $\Omega = E^n$ ,  $X_i(\mathbf{x}) = x_i$ , où les éléments de  $\Omega$  sont choisis suivant la loi  $P_n$  telle que la probabilité d'une série de résultats est le produit des probabilités de chacun d'eux :

$$P^n(x_1, \dots, x_n) = P(x_1) \times \dots \times P(x_n).$$

Les variables aléatoires  $X_i$  sont alors par construction indépendantes et de même loi. Une liste  $(X_1, \dots, X_n)$  de variables aléatoires indépendantes et de même loi  $P$  est appelée un échantillon de la loi  $P$ . Un échantillon d'une expérience est ainsi toujours modélisé par un échantillon de la loi  $P$  modélisant l'expérience.

En classe de première, on rencontrera cette situation dans les cas simples de deux lancers d'un dé ou de  $n$  lancers d'une pièce équilibrée et ce formalisme est bien inutile ; il suffit de dire que les résultats possibles (couples de nombres dans  $\{1, \dots, 6\}$ , listes de 0 et de 1) sont équiprobables et on en restera à cette approche intuitive pour ce niveau. On étudiera comme exemples les variables aléatoires somme ou produit des variables  $X_i$  dans le cas de  $n$  lancers d'un dé ou d'une pièce équilibrée ( $n < 4$ ).

## Simulation de chiffres au hasard

On clarifiera brièvement les positions respectives de la modélisation et de la simulation : modéliser consiste à associer un modèle à des données expérimentales, alors que simuler consiste à produire des données à partir d'un modèle prédéfini. On parlera de simulation d'une loi de probabilité  $P$  ; la simulation d'une telle loi avec des listes de chiffres au hasard ne peut se faire que si  $P$  peut être construite à partir d'une loi équirépartie. Pour simuler une expérience, on associe d'abord un modèle à l'expérience en cours, puis on simule la loi du modèle ; on pourra détailler ces étapes, sans cependant le faire systématiquement dans les cas simples des expériences de référence.

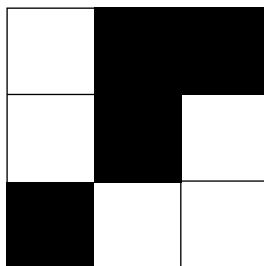
#### Exemples d'activités utilisant des simulations

1 – On considère deux stratégies de choix de nombres parmi les nombres 1, 3, 5.

- Choix au hasard.
- Choix selon la loi  $(0,1, 0,1, 0,8)$ .

Calculer l'espérance des deux lois ci-dessus. Simuler  $n$  choix selon l'une des deux méthodes ; regarder si au vu de la moyenne des séries observées, quelqu'un ne connaissant pas le modèle choisi pour simuler peut le deviner. On fera varier  $n$ .

2 – Pour la grille suivante, on considère trois procédures de choix de cases blanches :



- a) On choisit une case blanche au hasard parmi les cinq cases blanches.
- b) On choisit au hasard une ligne puis, dans la ligne, une case au hasard parmi les cases blanches de cette ligne.
- c) On choisit au hasard une colonne puis dans la colonne une case au hasard parmi les cases blanches de cette colonne.



Déterminer dans chacun des trois cas la loi de probabilité mise en jeu sur l'ensemble des cases blanches.

Pour une des trois lois de probabilité, un élève simule  $n$  choix de cases blanches ; au vu de la distribution des fréquences obtenue, un autre élève qui ignorerait quelle loi a été simulée peut-il la deviner ?

Dans les deux exemples ci-dessus, on insistera sur le fait que l'observation de résultats simulés ne permet pas de remonter au modèle à coup sûr : une des fonctions de la statistique est de calculer la probabilité que l'on a de se tromper en « remontant d'une distribution de fréquences à une loi de probabilité ».

#### Exercice

Une expérience consiste à choisir successivement deux chiffres  $d$  et  $u$  au hasard. On considère l'application  $T$  qui à  $(d, u)$  fait correspondre  $10d + u$ . Calculer la probabilité que  $10d + u \leq k$ , où  $k$  est un entier entre 0 et 99. On justifie ainsi que pour construire une liste de nombres au hasard entre 0 et 99, on lit les chiffres d'une table de chiffres au hasard deux par deux.

## Cahier de statistique

Dans le document d'accompagnement de seconde, il était suggéré que l'élève ait un cahier de statistique où figurent les expériences ou les simulations faites en classe ou à la maison, à la demande de l'enseignant ou selon sa propre initiative. L'élève pourra alors revenir en première sur des questions posées en seconde, compléter certaines expériences de l'année précédente et enrichir son cahier de nouvelles simulations, observations et questions.

## Lexique

**Choix au hasard** dans un ensemble  $E$  : la loi de probabilité en jeu sur  $E$  est l'équiprobabilité.

**Diagramme en boîte** (ou à pattes ou à moustaches ou diagramme de Tuckey) : on divise l'intervalle des valeurs de la série non plus en intervalles de même longueur comme pour de nombreux histogrammes mais en intervalles qui contiennent des pourcentages des données fixés à l'avance.

On trouvera en annexe à ce document une note à l'usage des enseignants sur les diagrammes en boîte.

**Écart interquartile** : différence entre le troisième et le premier quartile.

**Écart type** : racine carrée de la variance ; l'unité de l'écart type est celle des données.

**Espérance** d'une loi de probabilité sur un ensemble  $E$  de nombres : moyenne des valeurs des éléments de  $E$  pondérées par leur probabilité.

**Espérance d'une variable aléatoire** : espérance de la loi de cette variable aléatoire.

**Étendue** : différence entre la plus grande et la plus petite valeur de la série.

**Événement** : un événement est un sous-ensemble de l'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire.

**Événement A et B** : si  $A$  et  $B$  sont deux événements, l'événement «  $A$  et  $B$  » est l'événement  $A \cap B$ .

**Événement A ou B** : si  $A$  et  $B$  sont deux événements, l'événement «  $A$  ou  $B$  » est l'événement  $A \cup B$ .

**Expériences aléatoires identiques** : signifie que l'on associe à chacune d'elles le même modèle. Les expériences de référence ont d'ailleurs aussi ceci de remarquable que, par exemple, le même modèle est pertinent pour des pièces (ou des dés) de fabrications différentes lancées par des individus différents : on parlera donc dans ce cas d'expériences identiques.

**Expériences de référence** : lancers de dés, de pièces équilibrées ; choix de nombres au hasard, tirages au hasard de boules colorées dans une urne, de cartes dans un jeu, etc. Considérons une expérience aléatoire modélisée par une loi de probabilité  $P$  sur

un ensemble fini  $E$ . On pourra le plus souvent trouver une expérience de référence qui, à un codage près des issues possibles, est régie par le même modèle ; les questions relatives à l'expérience originelle pourront être traduites dans le cadre de l'expérience de référence. Associer l'expérience originelle à une expérience de référence n'est néanmoins pas une activité à systématiser : l'élève aura recours à cette possibilité uniquement selon ses besoins.

**Intervalle interdécile** : intervalle dont les extrémités sont le premier et le neuvième déciles.

**Intervalle interquartile** : intervalle dont les extrémités sont le premier et le troisième quartiles.

**Loi de probabilité** sur  $E = \{x_1, \dots, x_r\}$  : c'est une liste  $(p_1, \dots, p_r)$  de nombres positifs et de somme 1, associés aux éléments de  $E$ .

**Loi des grands nombres** (en langage imagé) :

*Si on choisit  $n$  éléments d'un ensemble fini  $E$  selon une loi de probabilité  $P$ , indépendamment les uns des autres, alors la distribution des fréquences est proche de la loi de probabilité  $P$  lorsque  $n$  est grand.*

**Loi d'une variable aléatoire** : soit  $T$  une variable aléatoire définie sur  $E$  à valeurs dans  $E'$ . Soit  $P$  une loi de probabilité définie sur  $E$ . La loi de  $T$  est une loi de probabilité définie sur  $E'$  par  $P'(x') = P(T = x')$ , où  $P(T = x')$  désigne la probabilité de l'ensemble des éléments de  $E$  dont l'image par  $T$  est  $x'$ .

**Médiane (empirique)** : on ordonne la série des observations par ordre croissant ; si la série est de taille  $2n + 1$ , la médiane est la valeur du terme de rang  $n + 1$  dans cette série ordonnée ; si la série est de taille  $2n$ , la médiane est la demi-somme des valeurs des termes de rang  $n$  et  $n + 1$  dans cette série ordonnée. La définition de la médiane n'est pas figée : certains logiciels et certains ouvrages définissent la médiane comme étant le deuxième quartile ou le cinquième décile ; dans la pratique de la statistique, les différences entre ces deux définitions sont sans importance. Au lycée, on évitera tout développement à ce sujet qui ne serait pas une réponse individuelle à une question d'un élève.

**Modèle d'une expérience aléatoire** : c'est une loi de probabilité sur un ensemble, qui est souvent celui des issues observables de l'expérience.

**Neuvième décile (empirique)** : c'est le plus petit élément  $d'$  des valeurs des termes de la série, tel qu'au moins 90 % des données soient inférieures ou égales à  $d'$ .

**Pièce équilibrée** : on choisit pour modéliser le lancer d'une telle pièce l'équiprobabilité de pile et de face.

**Premier décile (empirique)** : c'est le plus petit élément  $d$  des valeurs des termes de la série, tel qu'au moins 10 % des données soient inférieures ou égales à  $d$ .

**Premier quartile (empirique)** : c'est le plus petit élément  $q$  des valeurs des termes de la série, tel qu'au moins 25 % des données soient inférieures ou égales à  $q$ .

**Probabilité d'un événement** : c'est la somme des probabilités des éléments qui le composent.

**Troisième quartile (empirique)** : c'est le plus petit élément  $q'$  des valeurs des termes de la série, tel qu'au moins 75 % des données soient inférieures ou égales à  $q'$ .

**Variable aléatoire** : application définie sur un ensemble muni d'une loi de probabilité  $P$  ; son rôle est de transporter  $P$  sur un autre ensemble (voir *loi d'une variable aléatoire*).

**Variance d'une loi de probabilité** : espérance des carrés des écarts à l'espérance ; c'est aussi la différence entre « l'espérance des carrés » et « le carré de l'espérance ».

**Variance d'une variable aléatoire** : c'est celle de sa loi.

**Variance empirique** : moyenne des carrés des écarts à la moyenne ; c'est aussi la différence entre « la moyenne des carrés » et « le carré de la moyenne ».



## LIEUX GÉOMÉTRIQUES DANS LE PLAN

La notion de lieu fait l'objet d'une rubrique du programme, mais comme cela est précisé, elle peut se rapporter à de nombreux chapitres et ne doit pas être traitée indépendamment.

On trouvera d'abord ci-dessous quelques activités très simples, ne nécessitant aucune connaissance spécifique de la classe de première. La notion de lieu y est présentée comme la recherche des positions possibles pour un élément répondant à une question, compte tenu des contraintes de la figure; il convient de s'interroger aussi sur le caractère complet de la recherche : a-t-on bien obtenu toutes les positions possibles et n'en a-t-on pas rajouté ?

On trouve ensuite des situations choisies pour montrer comment cette activité de recherche de lieu fait appel à des connaissances très diverses : caractérisation du triangle rectangle, triangles semblables, triangles isométriques, distance d'un point à une droite, bissectrice, repérage, produit scalaire et bien sûr transformations.

Cette notion de lieu se prête particulièrement à la mise en œuvre d'activités mathématiques riches et formatrices, notamment dans le domaine du raisonnement.

### Quelques situations simples (approche de la notion de lieu)

#### Triangle d'aire donnée

Soit un segment  $[AB]$  de longueur 5 cm. Construction d'un triangle  $ABC$  d'aire  $10 \text{ cm}^2$ ; détermination de l'ensemble des positions possibles pour  $C$ .

#### Parallélogramme d'aire donnée

Soit un segment  $[AB]$  de longueur 5 cm.

a) Construction de  $C$  et  $D$  tels que  $ABCD$  soit un parallélogramme d'aire  $15 \text{ cm}^2$ ; détermination de l'ensemble des positions possibles pour  $C$ , puis pour  $D$ .

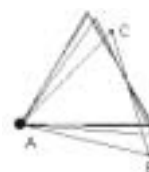
b) Construction de  $C$  et  $D$  tels que  $ABCD$  soit un parallélogramme de périmètre 20 cm; détermination de l'ensemble des positions possibles pour  $C$ , puis pour  $D$ .

#### Triangle équilatéral

Soit un point  $A$ .

a) Construction de  $B$  et  $C$  tels que  $ABC$  soit un triangle équilatéral de périmètre 12 cm; ensemble de toutes les positions possibles pour  $B$ , puis pour  $C$ .

b) Construction de  $B$  et  $C$  tels que  $ABC$  soit un triangle équilatéral d'aire  $12 \text{ cm}^2$ ; ensemble de toutes les positions possibles pour  $B$ , puis pour  $C$ .



#### Rectangle ou losange de diagonale donnée

Soit  $A$  et  $C$  deux points donnés.

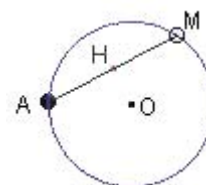
a) Construction de  $B$  et  $D$  tels que  $ABCD$  soit un rectangle de diagonale  $[AC]$ ; ensemble de toutes les positions possibles pour  $B$ , puis pour  $D$ .

b) Construction de  $M$  et  $N$  tels que  $AMCN$  soit un losange de diagonale  $[AC]$ ; ensemble de toutes les positions possibles pour  $M$ , puis pour  $N$ .

### Autres situations

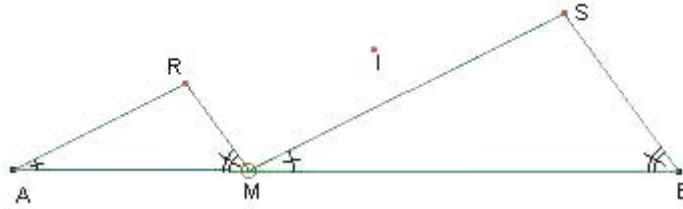
#### Projeté orthogonal

Soit un cercle de centre  $O$  et une corde  $[AM]$ . Soit  $H$  la projection orthogonale de  $O$  sur  $[AM]$ . Lieu de  $H$  lorsque  $M$  parcourt le cercle.



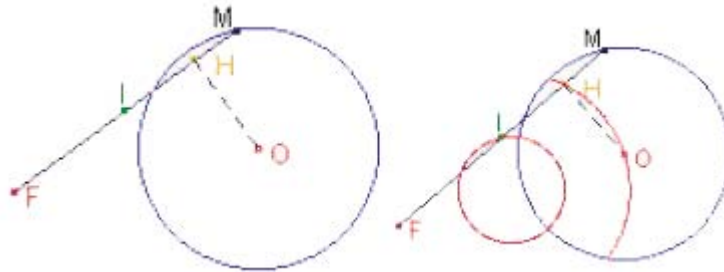
### Triangles semblables

Soit deux angles  $a$  et  $b$ , un segment  $[AB]$ , un point  $M$  de ce segment et deux triangles semblables  $AMR$  et  $MBS$  tels que  $R$  et  $S$  soient du même côté par rapport à  $[AB]$ ,  $\hat{A} = \hat{M} = a$  et  $\hat{M} = \hat{B} = b$ .  
Lieu du milieu  $I$  de  $[RS]$  lorsque  $M$  parcourt le segment  $[AB]$ .



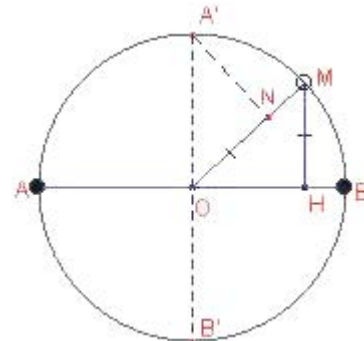
### Un arc de cercle

Dans le plan, soit  $F$  un point et  $(C)$  un cercle de centre  $O$ . Un point  $M$  décrit le cercle  $(C)$ .  
Lieu du milieu  $I$  du segment  $[FM]$ ; lieu de la projection  $H$  de  $O$  sur le segment  $[FM]$ .  
Envisager le cas où  $F$  est à l'intérieur du cercle  $(C)$  et celui où il appartient à ce cercle.



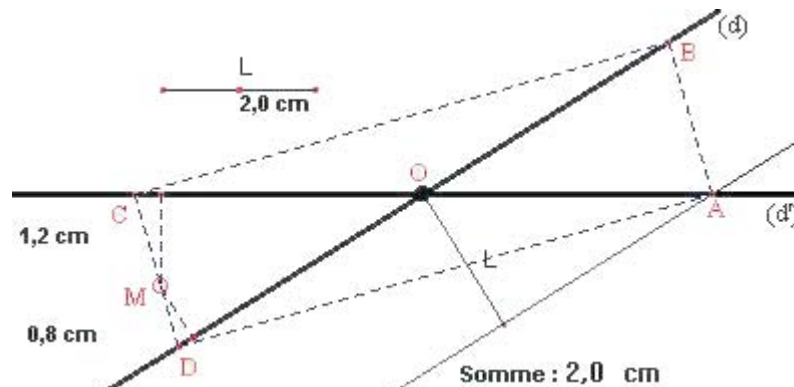
### À l'aide de triangles isométriques

Soit  $M$  un point du cercle de centre  $O$  et de diamètre  $[AB]$ . Soit  $H$  la projection orthogonale de  $M$  sur  $[AB]$ . Soit  $N$  le point de la demi-droite  $[OM)$  tel que  $ON = MH$ .  
Lieu du point  $N$  lorsque  $M$  parcourt le cercle.  
*Indication* : considérer le diamètre  $[A'B']$  orthogonal au diamètre  $[AB]$  et reconnaître deux triangles isométriques.



### Somme des distances

Lieu des points  $M$  dont la somme des distances à deux droites  $(d)$  et  $(d')$  est égale à une longueur donnée  $L$ .  
*Indication* : si  $M$  est un point de la base d'un triangle isocèle, la somme des distances de  $M$  aux côtés égaux est constante.

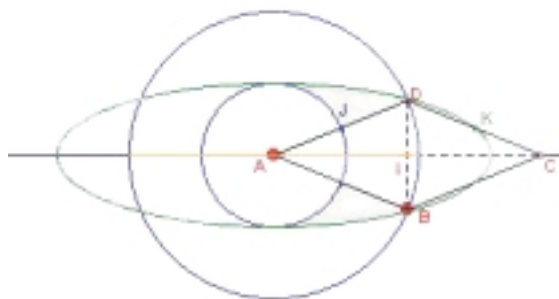


### Losange articulé

Soit ABCD un losange tel que A est fixe, la longueur AB est donnée (6 cm) et la direction de la diagonale (AC) est fixe.

Lieu de I, centre du losange; lieu de J, milieu de [AD] ?

Soit K le milieu de [DC]. Conjecturer le lieu de K. Coordonnées de K en fonction de l'angle  $\widehat{CAD}$ . Lieu de K comme ensemble d'équation  $x^2 + 9y^2 = 81$ .

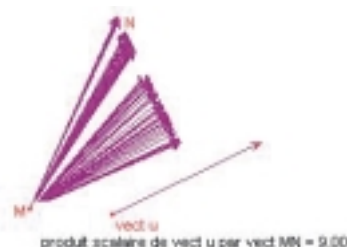


### Produit scalaire

Soit un vecteur  $\vec{u}$  de norme 3.

Soit M un point quelconque. Où placer N tel que  $\vec{u} \cdot \vec{MN} = 9$  ?

*Remarque* : la réalisation de cette construction dans un logiciel de géométrie dynamique à partir d'un point M quelconque permet d'obtenir l'ensemble des vecteurs possibles. (Pour l'information des usagers de ces logiciels, le produit scalaire peut y être facilement obtenu à l'aide de  $\frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$ .)



## Avec des transformations

### Parallélogramme

Soit A et B deux points fixes.

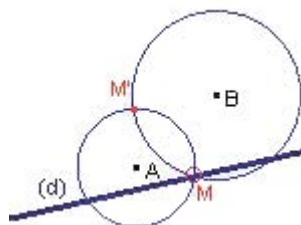
À tout point M, on associe le point N tel que ABMN soit un parallélogramme.

Lieu de N lorsque M décrit :

- une droite (d)
- un cercle (C)
- une figure (F).

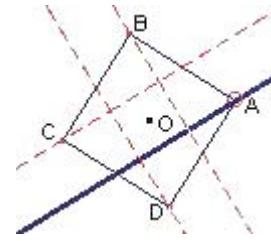
### Intersection de deux cercles

Soit une droite (d) et deux points A et B en dehors de cette droite. À tout point M de (d), on associe le deuxième point M' d'intersection des cercles de centres respectifs A et B et passant par M. Lieu de M' quand M décrit (d).



### Sommets d'un carré

Soit  $(d)$  une droite et  $O$  un point n'appartenant pas à  $(d)$ . Soit  $A$  un point de  $(d)$  et  $ABCD$  le carré de sens direct ayant pour centre  $O$ . Lieux des points  $B$ ,  $C$  et  $D$  lorsque  $A$  parcourt  $(d)$ .



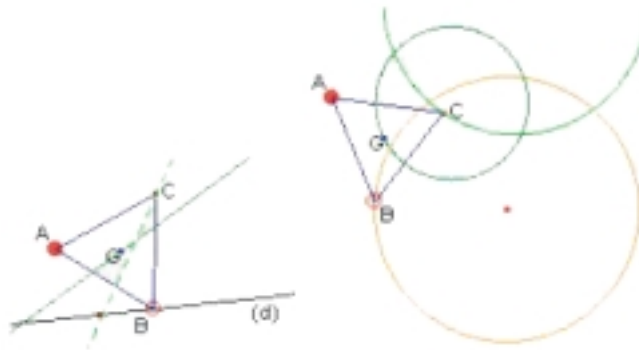
### Triangle équilatéral

Soit un point  $A$ . Étant donné un point  $B$ , on construit  $C$  tel que  $ABC$  soit un triangle équilatéral (direct); soit  $G$  le centre de gravité de ce triangle  $ABC$ .

a) Lieu de  $C$  puis lieu de  $G$  lorsque  $B$  décrit une droite  $(d)$ .

b) Même question lorsque  $B$  décrit un cercle.

*Indication* : chercher le lieu du milieu de  $[BC]$  pour déterminer le lieu de  $G$ .

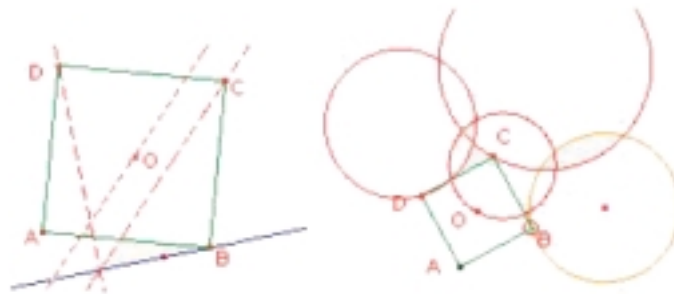


### Carré

Exercice semblable au précédent mais en construisant cette fois  $C$  et  $D$  tels que  $ABCD$  soit un carré.

Lieu de  $C$ .

*Prolongement possible* : sans traiter explicitement ni la composée de transformation ni la similitude, on peut proposer la recherche des lieux de  $C$  et de  $O$  par l'intermédiaire, par exemple, du point  $D'$  de  $[AC]$  tel que  $AD' = AD$ .



### Équerre à $30^\circ$

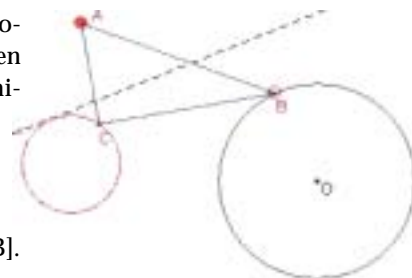
Soit un point  $A$  fixe. À tout point  $B$ , on associe  $C$  tel que le triangle  $ABC$  soit rectangle en  $C$  et l'angle en  $A$  soit de  $60^\circ$  ( $ABC$  est demi-équilatéral).

Lieu du point  $C$  lorsque  $B$  décrit :

a) une droite  $(d)$

b) un cercle  $(C)$ .

*Indication* : chercher le lieu de  $I$  milieu de  $[AB]$ .



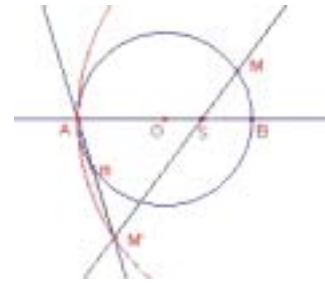
### Point sur un cercle de diamètre donné

Soit A et B deux points, S un point de la droite (AB) et (C) le cercle de diamètre [AB].

À tout point de (C), on associe le point m diamétralement opposé à M et le point M' intersection des droites (SM) et (mA).

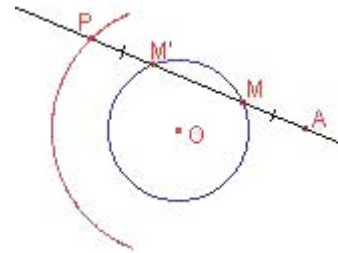
Lieu du point M' lorsque M décrit le cercle (C).

*Indication* : homothétie de centre S.



### Sécante à un cercle

Soit un cercle (C) et A un point extérieur à ce cercle. Soit M un point quelconque du cercle (C); la droite (AM) recoupe le cercle en M'. Soit P le point tel que  $\vec{M'P} = \vec{AM}$  Lieu du point P.

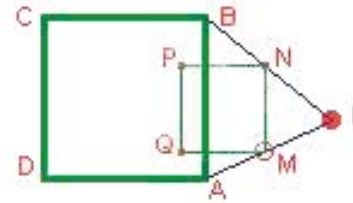


### Sommets d'un carré

Soit ABCD un carré et I un point.

À un point M décrivant le segment [AI], on associe le point N de [BI] tel que (MN) soit parallèle à (AB) et les points P et Q tels que MNPQ soit un carré construit du même côté que ABCD.

Lieux des points P et Q.



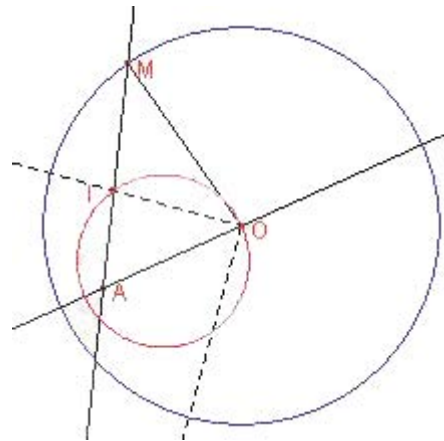
### Pied de la bissectrice

Soit un cercle de centre O et de rayon r et un point A intérieur à ce cercle.

Un point M décrit le cercle.

Lieu du point d'intersection de la bissectrice de l'angle  $\widehat{AOM}$  avec le segment [AM].

*Indication* : le pied de la bissectrice de  $\widehat{AOM}$  partage le côté opposé en parties proportionnelles aux côtés de l'angle  $\widehat{AOM}$ .



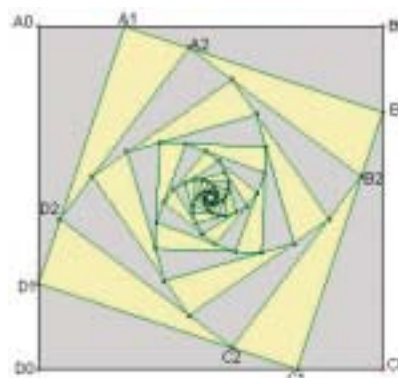
EXEMPLES DE SUITES

Figures géométriques et concept de limite

Soit  $A_0B_0C_0D_0$  un carré de côté  $c_0$ .  
 On construit le point  $A_1$  situé au quart du segment  $[A_0B_0]$  à partir de  $A_0$ ; le point  $B_1$  au quart du segment  $[B_0C_0]$  à partir de  $B_0$ ; de même,  $C_1$  sur  $[C_0D_0]$  et  $D_1$  sur  $[D_0A_0]$ . Et on itère...

Est-ce que le dessin s'arrête ? Comment évoluent les côtés et les aires des quadrilatères  $A_nB_nC_nD_n$  ? Que donnent les calculs sur ordinateurs ? Quelle est la *figure limite* ?

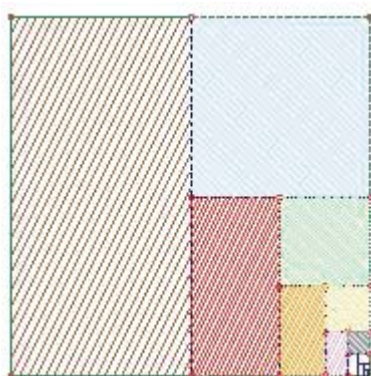
Expression de  $c_{n+1}$  en fonction de  $c_n$ ; nature de la suite; décroissance; ... convergence.



sommet au quart		
n	c(n)	a(n)
1	4	16
2	3,16227766	10
3	2,5	6,25
4	1,97642354	3,90625
5	1,5625	2,44140625
6	1,23526471	1,52587891
7	0,9765625	0,95367432
8	0,77204044	0,59604645
9	0,61035156	0,37252903
10	0,48252528	0,23283064

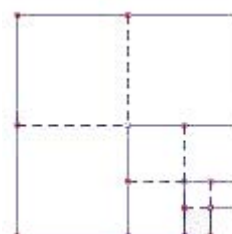
Voici les résultats obtenus à l'aide d'un tableur.

Autres exemples



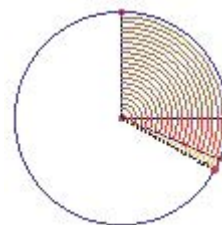
Quelles suites sont cachées dans cette figure ?

Pour calculer une somme infinie  $1/4 + (1/4)^2 + \dots$   
 Archimède a utilisé la figure ci-contre illustrant  $3 \times (1/4) + 3 \times (1/4)^2 + 3 \times (1/4)^3 + 1/4 = 1$ . Puis il est passé à la limite.  
 Qu'en pensez-vous ?

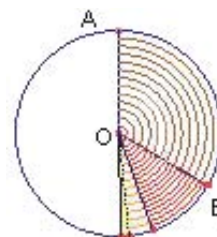




À un secteur, on ajoute le quart de ce secteur et on recommence. En partant d'un quart de disque, quelle surface parcourt-on ?



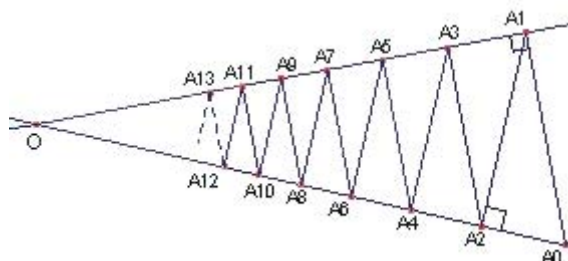
Même question si on ajoute cette fois le tiers et si on part du tiers.



### Des triangles semblables

Soit deux droites sécantes (d) et (d') et un point  $A_0$  situé sur une des droites. On définit la suite de points  $(A_n)$  telle que  $A_{n+1}$  soit la projection orthogonale de  $A_n$  sur l'autre droite.

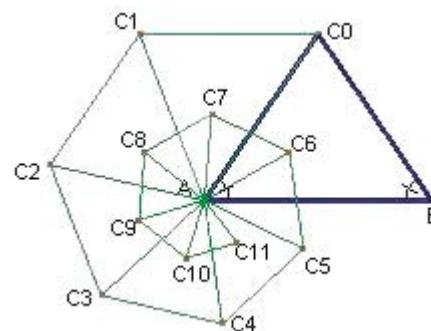
Étude des suites  $(A_n A_{n+1})$ , de  $(A_{2n} A_{2n+1})$  et  $(A_{2n+1} A_{2n+3})$ ; étude de la suite  $(a_n)$ ,  $a_n$  désignant l'aire du triangle  $A_n A_{n+1} A_{n+2}$ .



### Spirale

Soit  $[AB]$  un segment de longueur donnée  $l$  et  $C_0$  tel que  $ABC_0$  soit un triangle isocèle.

Soit  $C_1$  le point tel que  $AC_0C_1$  soit directement semblable au triangle  $ABC_0$  puis  $C_2$  le point tel que  $AC_1C_2$  soit directement semblable à  $AC_0C_1$  et ainsi de suite.



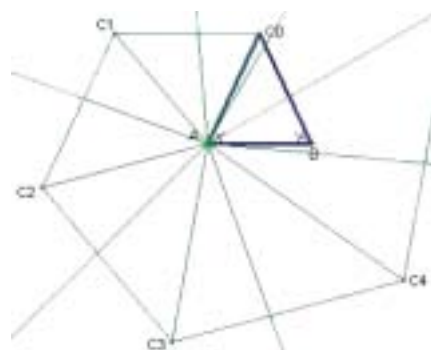
On définit une suite de triangles semblables  $AC_n C_{n+1}$ .

Calculer le rapport de similitude.

Déterminer la suite  $(c_n)$  des longueurs des côtés égaux des triangles isocèles  $AC_n C_{n+1}$ .

Déterminer la suite  $(a_n)$  des aires de ces triangles.

Variations de ces suites : envisager  $AC_0 < AB$  et  $AC_0 > AB$ .



## Croissance

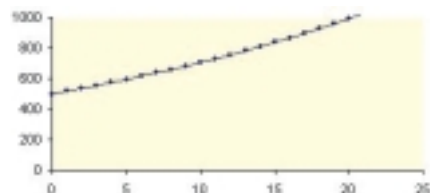
### Évolution d'une population

Étudier simultanément les modèles suivants pour l'évolution d'une population d'animaux d'une réserve, population qui ne peut dépasser 1 000 individus :

- observer ce qui se passe sur 20 générations (graphique des valeurs) ;
- expérimenter à propos de certains phénomènes observés ;
- obtenir quelques résultats théoriques.

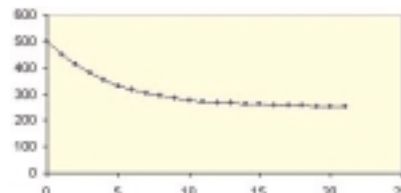
(1) Croissance exponentielle pure :

$$p_n = 1,035 p_{n-1}$$



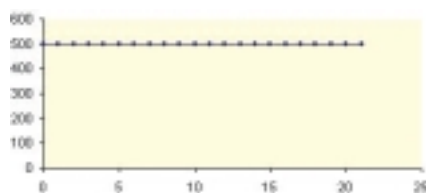
(2) Décroissance exponentielle et

$$\text{apport constant : } p_n = 0,8 p_{n-1} + m$$

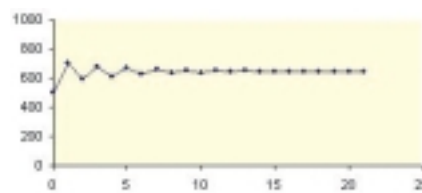


(3) Quelques modèles discrets : croissance tempérée (par la quantité de nourriture)

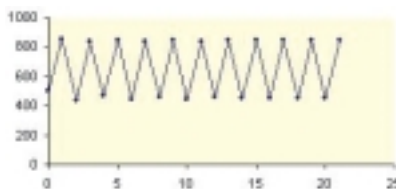
$$p_n = 2 (1 - 0,001 p_{n-1}) p_{n-1}$$



$$p_n = 2,8 (1 - 0,001 p_{n-1}) p_{n-1}$$



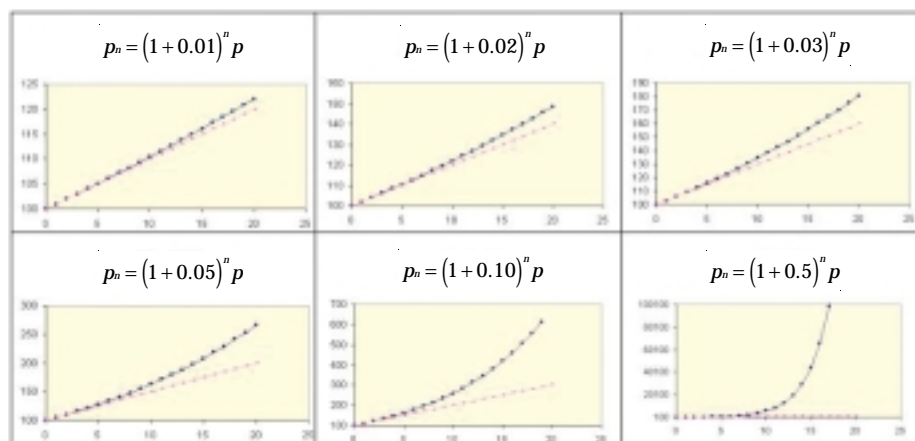
$$p_n = 3,4 (1 - 0,001 p_{n-1}) p_{n-1}$$



Placement d'un capital :  $p_{n+1} = (1 + t) p_n$

On a donc  $p_n = (1 + t)^n p_0$ .

Évolution sur 20 ans pour certaines valeurs de  $t$  ; approximation de  $(1 + t)^n$  par  $1 + nt$ .



Pour rendre plus concret le fait que le capital croît indéfiniment, on peut calculer le temps  $\tau$  de doublement du capital : c'est un bon indicateur de la rapidité de croissance. Il serait intéressant d'exprimer  $\tau$  en fonction de  $t$  : on aura l'occasion de le faire en terminale après avoir étudié les logarithmes.