Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3

Objectifs

La proportionnalité est une notion autour de laquelle peuvent être pensés et organisés de nombreux apprentissages mathématiques. Sa maîtrise est essentielle tant pour un usage dans la vie courante que dans un cadre professionnel. Son apprentissage s'inscrit dans la durée.

Dès le cycle 2, l'élève a rencontré des situations de proportionnalité dans le cadre de la résolution de problèmes multiplicatifs. Ce travail se poursuit au cycle 3 dans chacun des trois thèmes « Nombres et calculs », « Grandeurs et mesures » et « Espace et géométrie ». L'élève enrichit le champ des problèmes multiplicatifs en croisant diverses situations relevant de la proportionnalité auxquelles il peut donner du sens. Il apprend à repérer des situations relevant ou non de la proportionnalité. Il résout des problèmes de prix, de consommation, de recettes, etc. en utilisant différentes procédures (procédure utilisant la propriété de linéarité pour l'addition, procédure utilisant la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre, procédure mixte utilisant les propriétés de linéarité pour l'addition et pour la multiplication par un nombre, passage par l'unité, procédure utilisant le coefficient de proportionnalité). L'objectif n'est pas, à ce stade, de mettre en avant telle ou telle procédure particulière, mais de permettre à l'élève de disposer d'un répertoire de procédures, s'appuyant toujours sur le sens, parmi lesquelles il pourra choisir en fonction des nombres en jeu dans le problème à résoudre.

Des situations de proportionnalité mettant en jeu des nombres simples, avec des rapports entre les nombres permettant des calculs aisés, donnent l'occasion de travailler le calcul mental.

Liens avec les domaines du socle

La résolution de problèmes de proportionnalité permet d'acquérir des connaissances et de développer des compétences en lien avec chacun des domaines du socle.

De manière générale, les mathématiques participent à la maitrise de la langue française. Elles offrent de nombreuses occasions pour le développement de compétences langagières en élargissant le répertoire lexical des élèves, en favorisant les situations de communication (sous-domaine 1.1). La résolution de problèmes de proportionnalité est un terrain particulièrement fécond pour les interactions entre la langue française et le langage mathématique puisque la verbalisation en langage naturel des procédures utilisées (prendre le double, le triple, le tiers, le quadruple, d'une grandeur) contribue à la fois à l'élargissement du répertoire lexical et à et la compréhension d'une notion mathématique.

Étudier des relations entre deux grandeurs permet d'effectuer de manière efficace des calculs en utilisant un langage mathématique adapté, par exemple celui des nombres décimaux ou des fractions (sous-domaine 1.3).

La formation de la personne et du citoyen, plus particulièrement dans son registre « réflexion et discernement » (domaine 3.3) est largement convoquée à travers par exemple des problèmes de coûts ou de remises relevant ou non de la proportionnalité : apprendre à justifier ses choix et à confronter ses propres jugements avec ceux des autres, remettre en cause ses jugements initiaux après un débat argumenté.

La proportionnalité intervient pour résoudre des problèmes relevant de systèmes naturels et techniques (domaine 4) et l'utilisation des échelles permet de contribuer à se repérer dans l'espace (domaine 5).

Progressivité des apprentissages

La notion de proportionnalité est introduite en première année du cycle 3. Le travail mené s'appuie tout particulièrement sur les problèmes multiplicatifs traités au cycle 2.
Les procédures rencontrées au cycle 3 pour résoudre des problèmes de proportionnalité continueront d'être utilisées au cycle 4 où seront introduites, en fin de cycle, les fonctions linéaires. C'est donc tout au long des trois cycles de la scolarité obligatoire que se construisent progressivement les connaissances relatives à la notion de proportionnalité :

- **Au cycle 2,** les élèves rencontrent des situations de proportionnalité dans des problèmes multiplicatifs.
  Exemple : Un manuel de mathématiques pèse 340 g. Combien pèsent 5 manuels identiques ?
  Ces problèmes préparent les élèves à la reconnaissance de situation de proportionnalité et à leur résolution par une procédure utilisant la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre.
- **Au cycle 3,** les premiers travaux sur la proportionnalité sont proposés dès la première année du cycle ; les élèves ont recours à des procédures utilisant les propriétés de la linéarité (procédure utilisant la propriété de linéarité pour l'addition, procédure utilisant la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre). Ensuite, les élèves rencontrent progressivement des situations qui nécessitent de combiner des procédures utilisant les propriétés de la linéarité (procédure mixte utilisant les propriétés de linéarité pour l'addition et pour la multiplication par un nombre, passage par l'unité). Pendant la seconde moitié du cycle, s'ajoutent des problèmes impliquant des échelles ou des vitesses constantes. Si le coefficient de proportionnalité est rencontré au cours moyen, notamment lors de travaux sur les échelles, son institutionnalisation dans un cadre général peut être reportée en toute fin de cycle 3.
- **Au cycle 4,** toutes les procédures introduites au cycle 3 pour résoudre des problèmes de proportionnalité continuent à être utilisées en fonction des nombres en jeu dans les problèmes proposés et des connaissances de faits numériques des élèves. Des tableaux de proportionnalité sont régulièrement utilisés pour résoudre des problèmes ; ils facilitent l'utilisation du coefficient de proportionnalité, particulièrement efficace quand un nombre important de données doivent être calculées. Le produit en croix est introduit après l'étude de l'égalité des fractions ; il permet de calculer rapidement une quatrième proportionnelle, quand les nombres en jeu ne permettent pas d'utiliser facilement des procédures basées sur les propriétés de linéarité. En fin de cycle, les élèves font le lien entre les fonctions linéaires et la proportionnalité.

Stratégies d'enseignement

La proportionnalité est appréhendée dans de nombreuses autres disciplines (géographie, EPS, sciences et technologie, etc.) ou dans des situations de la vie courante, ce qui permet de renforcer le travail mené en mathématiques. L'enseignant propose aux élèves des situations variées relevant de la proportionnalité et leur apprend à mobiliser différentes procédures pour résoudre des problèmes dans des contextes variés. L'enseignant invite les élèves à comparer ces procédures afin de constater que certaines sont plus efficaces que d'autres selon les nombres en jeu.

Pour que la proportionnalité prenne tout son sens, l'élève doit aussi être confronté à des situations ne relevant pas de la proportionnalité (« Si je mesure 1 mètre à 10 ans, je peux mesurer 2 mètres à 20 ans mais sûrement pas 4 mètres à 40 ans et je sais aussi que je ne mesurais pas 10 centimètres à 1 an. »)

Les propriétés de linéarité[1] pour l'addition et pour la multiplication par un nombre doivent être le plus souvent possible explicitées et sont une opportunité pour travailler l'expression orale. Les procédures relatives à la linéarité sont les premières rencontrées. Les relations entre les nombres mis en jeu constituent une variable didactique avec laquelle l'enseignant peut jouer. En effet, les rapports entre les nombres en jeu et la connaissance des tables de multiplication dans les deux sens (composition-décomposition) par les élèves vont influer sur le choix de la procédure à privilégier. L'enseignant propose dans un premier temps des situations mettant en jeu des nombres entiers entretenant entre eux des rapports simples (double, triple, quintuple, etc.) pour aller progressivement vers des situations plus compliquées (nombres décimaux, fractions, rapports plus complexes).

Les tableaux de proportionnalité ne doivent pas être conçus comme des objets d'enseignement ; s'ils peuvent permettre de résumer clairement une situation proposée dans un problème, les opérations à réaliser pour résoudre un problème de proportionnalité au cycle 3 ne doivent pas se faire par un raisonnement sur des lignes ou des colonnes d'un tableau mais uniquement sur des cardinaux ou des grandeurs, en explicitant ce qui est fait, tant à l'oral qu'à l'écrit. L'enseignant permet aux élèves de dégager les avantages et inconvénients de différentes procédures possibles mais ne les présente pas comme les seules procédures attendues lors de la résolution d'un problème relevant de la proportionnalité. En variant les nombres et les relations numériques, l'enseignant habitue l'élève à changer de procédure pour choisir de manière pertinente la plus efficace pour lui.

Le travail sur la proportionnalité est particulièrement propice au développement des six compétences travaillées en mathématiques : chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner et communiquer.

- **Chercher :** tester, essayer plusieurs pistes de résolution dans la résolution de problèmes relevant des structures multiplicatives.
- **Modéliser :** apprendre à modéliser des situations concrètes et reconnaître si elles relèvent de la proportionnalité ou non.
- **Représenter :** se questionner sur le caractère proportionnel d'une situation représentée graphiquement en géographie, en sciences et technologie par exemple (une situation de proportionnalité entre deux grandeurs a pour représentation graphique un ensemble de points alignés avec l'origine).
- **Raisonner :** chacune des étapes de résolution d'un problème relevant de la proportionnalité (compréhension de l'énoncé, identification d'une situation de proportionnalité, recherche, production et rédaction d'une solution) fait appel au raisonnement.
- **Calculer :** les nombres en jeu et l'état des connaissances des élèves vont permettre de varier les modalités de calcul mises en œuvre (calcul mental, en ligne, posé, instrumenté).
- **Communiquer :** l'explicitation de ce qui est fait nécessite un réel travail de communication tant à l'oral qu'à l'écrit. Différencier le vocabulaire des structures additives « de plus » et « de moins » et celui des structures multiplicatives « fois plus » et « fois moins ».

Dans la résolution de problèmes relevant de la proportionnalité, différentes procédures sont à faire travailler par les élèves. Dans chacun des trois thèmes du programme, l'enseignant veille à oraliser les procédures possibles en termes similaires, ce qui permet aux élèves de les réinvestir dans différents registres – numérique – grandeurs – géométrique, tout en comprenant qu'elles relèvent de la même notion.

Une analyse détaillée des procédures relevant de la proportionnalité est présentée en annexe au travers d'une collection d'exercices dont le thème est « Mousse au chocolat ». L'analyse *a priori* de chaque exercice est complétée par des productions d'élèves.

1. Voir encadré page suivante.

PROCÉDURES UTILISANT LA PROPRIETÉ DE LINÉARITE POUR L'ADDITION

Domaine « Nombres et calculs »
8 fois 10 est égal à 80 et 8 fois 3 est égal à 24.
Comme 13 est égal à 10 plus 3, on en déduit que 8 fois 13 est égal à 80 plus 24.

Domaine « Grandeurs et mesures »
5 kg de pommes de terre coûtent 6,40 € et 3 kg coûtent 3,84 €.
Comme 5 kg moins 3 kg font 2 kg, on en déduit que 2 kg de ces pommes de terre coûtent 6,40 € moins 3,84 € soit 2,56 €.

Domaine « Espace et géométrie »
La figure ABCD est telle que ACD est un triangle isocèle en A. On donne les dimensions suivantes DA = 18,2 cm, DC = 5,6 cm, AB = 11,9 cm et BC = 6,3 cm.
Sans utiliser de multiplication, indiquer les dimensions de l'agrandissement A'B'C'D' de cette figure telle que A'B' = 15,3 cm et B'C' = 8,1 cm.
Comme DC = 5,6 cm = 11,9 cm – 6,3 cm, on en déduit D'C' = 15,3 cm – 8,1 cm = 7,2 cm.
Comme DA = 18,2 cm = 11,9 cm + 6,3 cm, on en déduit D'A' = 15,3 cm + 8,1 cm = 23,4 cm.

PROCÉDURES UTILISANT LA PROPRIETÉ DE LINÉARITE POUR LA MULTIPLICATION PAR UN NOMBRE

Domaine « Nombres et calculs »
7 fois 13 est égal à 91.
Comme 35 est le quintuple de 7, on a 35 fois 13 est le quintuple de 91 c'est-à-dire 455.

Domaine « Grandeurs et mesures »
Une pile de 500 feuilles de papier identiques a une épaisseur de 3,5 cm. Quelle est l'épaisseur d'une pile de 2 000 de ces mêmes feuilles ?
J'ai acheté 35 mangas qui étaient tous au même prix à la librairie et cela m'a coûté 252 €.
Si ma sœur veut en acheter 5, combien va-t-elle payer ?

Domaine « Espace et géométrie »
Dans un agrandissement ou une réduction, les longueurs sur la figure agrandie ou réduite sont proportionnelles aux longueurs associées sur la figure initiale. Les situations d'agrandissement ou de réduction sont particulièrement riches et propices à la mise en place d'activités à prise d'initiatives.

Certaines procédures utilisent à la fois les propriétés de linéarité pour l'addition et pour la multiplication par un nombre, on les qualifie alors parfois de « **procédures mixtes** ».
Dix objets identiques coûtent 22 €. Combien coûtent quinze de ces objets ?
Pour résoudre ce problème on peut diviser par 2 le prix de dix objets pour trouver le prix de cinq objets (propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre) puis ajouter le prix de dix objets et le prix de cinq objets (propriété de linéarité pour l'addition).

PASSAGE PAR L'UNITÉ

À la garderie, il faut prévoir 80 centilitres de lait pour 5 enfants.
Combien faut-il prévoir de centilitres pour 3 enfants ?
Pour 5 enfants, il faut 80 centilitres de lait.
1 enfant, c'est 5 fois moins que 5 enfants. 5 fois moins que 80 centilitres c'est 16 centilitres.
Pour 1 enfant, il faut 16 centilitres de lait.
3 enfants, c'est 3 fois plus que 1 enfant. 3 fois plus que 16 centilitres c'est 48 centilitres.
Pour 3 enfants, il faut 48 centilitres de lait.

En fin de cycle 3, une nouvelle procédure est abordée, elle utilise **le coefficient de proportionnalité.**
Si 30 kg de café coûtent 600 €. Combien coûtent 13 kg de café ?
600 c'est 30 multiplié par 20, il faut multiplier le nombre de kilogrammes de café par 20 pour en trouver le prix en euros.
13 × 20 = 260
Le prix de 13 kg de café est 260 €.
On note ici l'utilisation d'une grandeur quotient (le coefficient de proportionnalité) : 20 €/kg.

Le coefficient de proportionnalité

Dans le cas où les grandeurs sont de natures différentes le coefficient de proportionnalité est une grandeur quotient dont l'unité est composée des deux unités en présence (€/L, €/kg, €/m, €/m², km/h, kg/L, etc.) et il convient de donner du sens à cette grandeur quotient (consommation, vitesse, masse volumique, etc.). La distinction entre un nombre, sans unité, utilisé dans les procédures utilisant la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre et un coefficient de proportionnalité, affecté d'une unité, peut alors se faire au moment de la verbalisation des procédures comme présenté dans l'exemple 1 en annexe.
Dans le cas de grandeurs de même nature liées par une relation de proportionnalité, comme les longueurs dans les agrandissements ou réductions de figures ou de solides, le coefficient de proportionnalité prend un statut particulier, il s'agit alors d'un nombre sans unité[2] correspondant à l'échelle, au coefficient de réduction, etc... Les élèves seront amenés à distinguer les cas où on raisonne sur des rapports de grandeurs de même nature mais exprimés dans des unités différentes des cas où on travaille avec la même unité et où on parle alors d'échelle. Voir exemple 2 en annexe.

L'enseignement curriculaire visé par les nouveaux programmes amène à concevoir l'école dans un principe de plus large inclusion. Il s'agit de prendre l'élève là où il en est et de l'accompagner dans son parcours personnel. Cela passe par une prise en compte de l'hétérogénéité de la classe, une différenciation et une diversification des apprentissages. Cette différenciation peut être envisagée en amont de la séance en adaptant les variables d'un exercice en fonction des élèves, mais elle doit surtout être effective en classe pendant les temps de recherche. L'enseignant pourra ainsi, en circulant dans les rangs, conseiller les élèves en fonction de leurs productions et de leurs besoins :

- inviter un élève n'arrivant pas à démarrer à consulter un exercice effectué précédemment pour retrouver une procédure pouvant s'appliquer ici ou encore lui proposer une première étape permettant de trouver un résultat intermédiaire, la valeur pour une unité par exemple ;
- inviter un élève à se relire, à voix basse ou à voix haute, pour corriger une erreur de calcul ;
- inviter un élève qui utilise toujours la même procédure, peu efficace ici, mais ayant réussi l'exercice, à refaire cet exercice modifié par des changements de contexte ou de valeurs numériques qui l'obligent à utiliser une autre procédure ;
- inviter un élève ayant rapidement réussi à traiter le problème proposé, de façon efficace, à refaire l'exercice avec d'autres variables nécessitant de trouver une autre procédure ou des compétences en calcul plus avancées ;
- inviter un élève rencontrant d'importantes difficultés en calcul à utiliser une calculatrice pour se centrer sur le raisonnement ;
- etc.

On voit ici qu'une une prise d'information directe sur les cahiers des élèves, pourra rendre caduques certaines corrections collectives.

Lors des mises en commun et des corrections collectives, la comparaison de différentes procédures doit permettre aux élèves d'acquérir ces différentes procédures et de prendre conscience qu'en fonction des nombres en jeu dans un problème, certaines sont plus efficaces que d'autres : demandant moins de calculs, ou faisant appel à des calculs plus simples, elles permettent de gagner en rapidité et de diminuer le risque d'erreurs.

2. On parle alors de « grandeur sans unité ».

Exemples de situations d'apprentissage

- Exemples illustrant la notion de coefficient de proportionnalité
- Activité : Mousse au chocolat
- Activité : Puzzle

Ressources complémentaires

Supports pédagogiques à destination des professeurs des écoles et des professeurs de mathématiques

- SCEREN (2010). Le nombre au cycle 3, Partie 5, Proportionnalité au cycle 3, p. 64-74.
- Bonnet N. (2011). *La proportionnalité sans problème*, CANOPE.
- CNDP (2002). *Document d'application des programmes, Mathématiques, cycle des approfondissements*. Exploitation des données numériques, proportionnalité, p. 16-17. CNDP.
- CNDP (2002). *Document d'application des programmes, Mathématiques, cycle des approfondissements*. Espace et géométrie, Agrandissement, réduction, p. 34. CNDP.
- Académie de Versailles (2012). Continuité École - Collège, La proportionnalité. Groupes départementaux Évaluation / Mathématiques – Commission École-Collège n°4.
- Ermel (2010). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes* - CM1 Cycle 3. Thème 4, module 2 - problèmes de proportionnalité, p. 199-231 et 260-287. Editions Hatier.
- Ermel (2010). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes* - CM2 Cycle 3. Thème 3, module 2 - proportionnalité, p. 217-239 et 281-345. Editions Hatier.

Supports pédagogiques et didactiques à destination des professeurs des écoles, des professeurs de mathématiques, des formateurs 1er et 2nd degrés en formation initiale et en formation continue

- Henry V., Lambrecht P. (2012). Manipulations, proportionnalité et non proportionnalité. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds), Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux pour le 21e siècle - *Actes du colloque EMF2012* (GT10, 1365-1377).
- Simard A. (2012a). Fondements mathématiques de la proportionnalité dans la perspective d'un usage didactique. *Petit x*, n°89, p. 51-63. IREM de Grenoble.
- Simard A. (2012b). Le concept de proportionnalité dans la liaison CM2-Sixième. *Petit x*, n°90, p. 35-52. IREM de Grenoble.
- Voisin S. (2014). L'enseignement de la proportionnalité en SEGPA. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, p. 200-218. Paris, Université Paris 7.
- Voisin S. (à paraître). L'enseignement de la proportionnalité : Une expérimentation en classe de SEGPA. *Petit x*. IREM de Grenoble.