Fiche d'exercices n$^{\text{o}}$ 1
Groupes et géométrie

Exercice 1.
Soit $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels muni de la loi de composition interne notée *, définie par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ (a,b) & \longmapsto & a * b = a + b + ab \end{array}$$

$(\mathbb{Q}, *)$ est-il un groupe ?

Exercice 2. *(Proposition 5, Chap. 1).*
Soient deux groupes G_1 et G_2.
Un groupe G est isomorphe à $G_1 \times G_2$ si, et seulement s'il contient deux sous-groupes H_1 et H_2 tels que :

a. $H_i \simeq G_i,$ pour $i = 1, 2.$

b. $\forall h_1 \in H_1, \forall h_2 \in H_2,\ h_1h_2 = h_2h_1.$

c. $G = H_1H_2.$

d. $H_1 \cap H_2 = \{e\},$ où e est l'élément neutre de G

Exercice 3.
Soit G un groupe.
On considère l'application

$$\begin{array}{cccc} f & G & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$$

a. Montrer que f est une permutation de G.

b. Montrer que f est un morphisme (et donc un automorphisme) si, et seulement si G est abélien.

Exercice 4.
Soit G un groupe dont tous les éléments sont d'ordre 2.
En notation multiplicative, cela signifie que $\forall x \in G,\ x^2 = e.$
En notation additive, cela signifie que $\forall x \in G,\ 2x = e.$

a. Donner un exemple de tel groupe, non réduit à l'élément neutre.

b. Montrer qu'un tel groupe G est abélien.

c. Montrer que si G est fini, son cardinal est alors une puissance de 2.

Exercice 5.
Montrer qu'un groupe fini d'ordre pair possède au moins un élément d'ordre 2.

Exercice 6.
Soit G un groupe fini,et soit m un entier premier avec l'ordre de G.

a. Montrer que, pour tout $a \in G$, l'équation $x^m = a$ possède une solution unique.

b. En déduire que G ne possède pas de sous-groupe d'ordre $m \neq 1$.

Exercice 7.
Montrer que $Aut(\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}) \simeq S_3$

Exercice 8.
Montrer que :

a. $\Gamma_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$
est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$.

b. $\Gamma_2 = \{1, i, -1, -i\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

c. $\Gamma_3 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ est un sous-groupe pour la multiplication, du corps $\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}$.

d. Montrer que $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ sont trois groupes isomorphes.
Reconnaissez-vous ce groupe ?

Exercice 9.
Soit $f : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupes finis, et soit G' un sous-groupe de G.

a. Montrer que l'ordre de $f(G')$ divise à la fois l'ordre de H et l'ordre de G'.

b. En déduire que si l'ordre de G' est premier à l'ordre de H, $G' \subset Kerf$.

Exercice 10.
Montrer que dans un groupe d'ordre 35, il existe un élément d'ordre 5, et un élément d'ordre 7.

Exercice 11.
Soit G un groupe d'ordre $2p$ avec p un nombre premier.
Montrer qu'il existe un élément d'ordre 2, et un élément d'ordre p.