

La Proportionnalité au collège



- 1^{ère} partie : Le concept « Proportionnalité »
- 2^{ème} partie : Quelques recommandations pour les progressions
- 3^{ème} partie : La proportionnalité dans les programmes

- Que vous vient-il à l'esprit lorsqu'on parle de proportionnalité ?
- Quelles activités avez-vous déjà proposées cette année autour de la proportionnalité ? Dans quelle(s) séquence(s) ?
- Quelles difficultés rencontrent vos élèves avec la proportionnalité ?

La **proportionnalité** est un thème autour duquel peuvent être pensés et organisés de **nombreux apprentissages** mathématiques.

Une **bonne maîtrise** par les élèves des connaissances relatives à ce thème est fondamentale, aussi bien **pour son usage dans la vie courante**, son utilisation dans **diverses disciplines** ou dans le **cadre professionnel** que pour son importance dans divers **domaines des mathématiques**.

- 1) Adrien a acheté 2,5 kg d'orange pour 5 euros et Paul 1,5 kg pour 3 euros. Le prix d'achat est-il proportionnel à la quantité achetée ?
- 2) La suite de nombres 2 ; 5 ; 6 est-elle proportionnelle à la suite de nombres 0,4 ; 1 ; 1,2 ?
- 3) Le salaire d'un ouvrier est-il proportionnel à son âge ?
- 4) Le prix d'un livre est-il proportionnel au nombre de ses pages ?
- 5) J'ouvre un robinet . La quantité d'eau écoulée est proportionnelle à la durée de l'écoulement ?

- 6) A vitesse constante, la distance parcourue par un vélo est-elle proportionnelle à la durée du parcours ?
- 7) Une cassette d'une durée de 60 minutes a une bande magnétique d'une longueur de 78 m. Une autre d'une durée de 90 minutes a une bande de 117 m de long. Peut-on dire qu'il y a proportionnalité entre la durée d'une cassette et la longueur de la bande magnétique ?
- 8) Neuf livres coûtent 18 euros, combien coûtent six livres ?
- 9) Un enfant a utilisé 45 perles pour faire trois colliers. Combien faut-il de perles pour fabriquer 7 colliers ? Combien de colliers peut-on fabriquer avec 135 perles?

Les élèves doivent dans un premier temps identifier les grandeurs en relation.

Il faut ensuite reconnaître s'il s'agit d'une situation relevant de la proportionnalité. **Cela est rarement dit de façon explicite dans l'énoncé.** L'élève doit donc utiliser **son expérience personnelle** et l'habitude qu'il a des situations de proportionnalité.

L'étape suivante est le choix par l'élève d'une procédure de résolution qui peuvent être multiples.

Et pour finir la mise en œuvre de la procédure choisie peut être source de nombreuses difficultés.

Il est donc nécessaire, non seulement d'apprendre aux élèves comment résoudre un problème relevant de la proportionnalité, mais encore de **leur fournir suffisamment de situations de référence** provenant de la **vie courante** (achat, échelle, pourcentage, vitesse, consommation d'essence, etc...) et des situations dans **d'autres cadres mathématiques** (la géométrie ou la mesure) ou empruntées à **d'autres domaines** (sciences physiques, géographie ...) afin d'enrichir leur expérience.

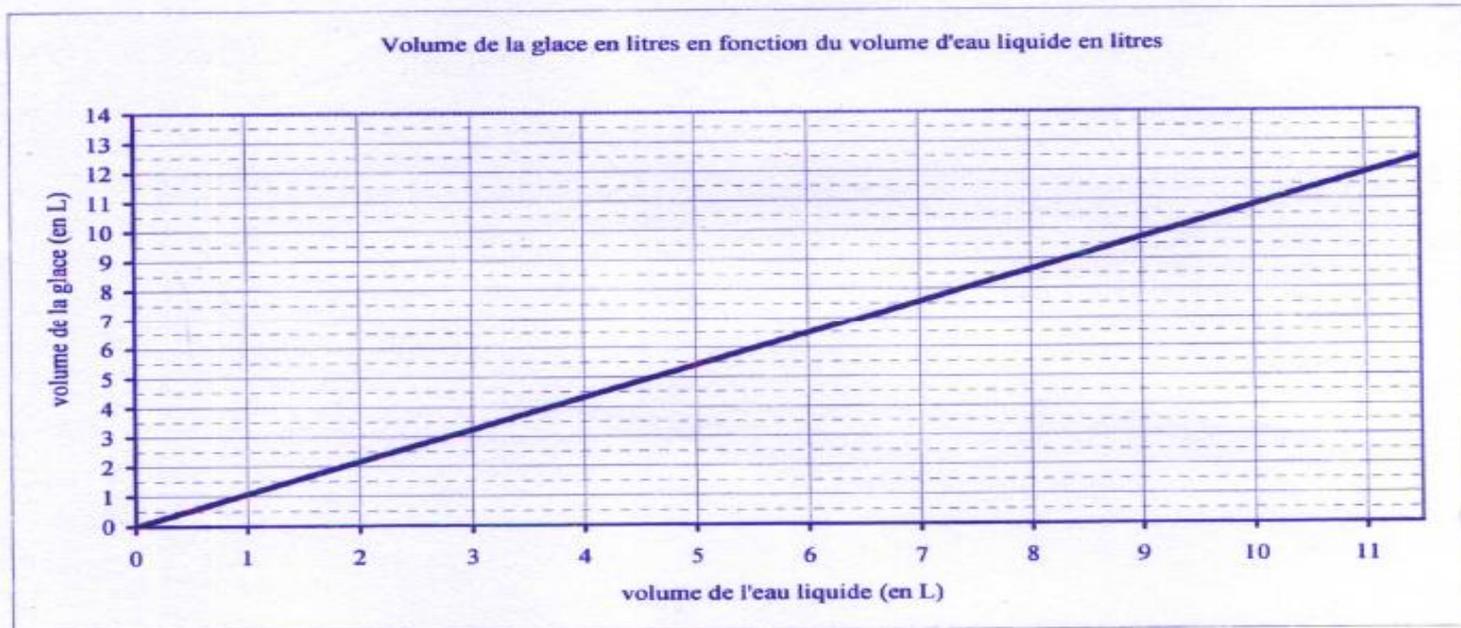
Par exemple : *Pour quatre personnes, Bastien a mis 200 g de farine et 60 g de sucre dans son gâteau. La cuisson demande 30 min au four. Il doit maintenant cuisiner pour six personnes. Quels conseils peut-on lui donner ?*

C'est avec ce type de petits exercices qu'il faut faire comprendre la notion de la proportionnalité aux élèves.

On pourra aussi établir des liens avec **d'autres chapitres** afin de lutter contre certaines idées reçues : par exemple, *l'aire d'un carré n'est pas proportionnelle à la longueur de son côté.*

D'autres exemples

L'eau en gelant augmente de volume. Le segment de droite ci-dessous représente le volume de glace (en litres) obtenu à partir d'un volume d'eau liquide (en litres).



- 1) En utilisant le graphique, répondre aux questions suivantes.
 - a) Quel est le volume de glace obtenu à partir de 6 litres de liquide ?
 - b) Quel volume d'eau liquide faut-il mettre à geler pour obtenir 10 litres de glace ?
- 2) Le volume de glace est-il proportionnel au volume d'eau liquide ? Justifier.
- 3) On admet que 10 litres d'eau donnent 10,8 litres de glace. De quel pourcentage ce volume d'eau augmente-t-il en gelant ?

La proportionnalité intervient à travers trois cadres différents :

- le cadre des grandeurs : relations entre deux grandeurs (masse et prix, périmètre du cercle et rayon ...)
- le cadre numérique : relations entre nombres – cadre purement mathématiques
- le cadre graphique : représentation de la relation entre deux grandeurs

Doc ressource La Proportionnalité

Quatre problématiques possibles :

- reconnaître une situation de proportionnalité ou de non proportionnalité,
- rechercher une (des) donnée(s) manquante(s) dans une situation de proportionnalité
- comparer des proportions
- changer de cadre (grandeurs - numérique - graphique).

Doc ressource La Proportionnalité

Des exemples

Sur le site internet de Chti'calissons, Jonathan a trouvé les informations suivantes :



Chti'calissons
350 g

Boîte 350 g en losange remplie de 28 calissons fabriqués selon la tradition du Ch'Nord !

Plus de détails

21,00 € TTC

Référence : CC59007-350 g

Quantité :

Ajouter au panier



Chti'calissons
650 g

Boîte 650 g en losange remplie de 52 calissons fabriqués selon la tradition du Ch'Nord !

Plus de détails

36,00 € TTC

Référence : CC59007-650 g

Quantité :

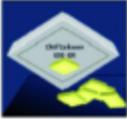
Ajouter au panier

Quelle boîte est-il préférable d'acheter ? Expliquer.

Doc Méthodes en Pratique

Des exemples

Voici la composition de son panier avant qu'il ne passe au paiement en ligne :

Produit	Description	Réf.	Dispo	Prix unitaire	Qté	Total
	Chti'calissons 650 g Boîte losange	CC59007-650g		36,00 €		72,00 €
Total produits TTC : 72,00 €						
Total frais de port TTC : 7,80 €						
TOTAL HT : 66,72 €						
Total Taxes : 13,08 €						
TOTAL TTC : 79,80 €						

En tenant compte des frais de port et des taxes, quel est le prix d'un calisson ?

Doc Méthodes en Pratique

Des exemples

Jeanne souhaite préparer une salade de tomates. Le marchand propose plusieurs variétés de tomates. Voici les prix indiqués de trois variétés.



Quelle est la variété la moins chère ? Présenter la démarche et les éventuels calculs.

Doc Méthodes en Pratique

La résolution de problèmes fait intervenir plusieurs démarches :

- propriété d'additivité
- propriété d'homogénéité cas de la "règle de trois" (socle), avec passage à l'unité
- combinaison linéaire (les deux propriétés précédentes)
- coefficient de proportionnalité
- égalité de rapports et produit en croix
- représentation graphique

Trois objectifs à travailler pour aider nos élèves :

- Augmenter la capacité à mobiliser une procédure et accroître son efficacité.
- Augmenter la variété des procédures utilisables et inciter les élèves à choisir la (les) procédures la (les) plus appropriée(s).
- Renforcer la compréhension des liens entre ces procédures (pour aboutir à la fonction linéaire).

Pour Noël et la nouvelle année, les parents de Chloé lui ont offert 50 euros, ses oncles et tantes 100 euros et ses grands-parents 150 euros. Chloé a décidé de placer tout cet argent sur un livret jeune qui lui rapporte 3% par an.

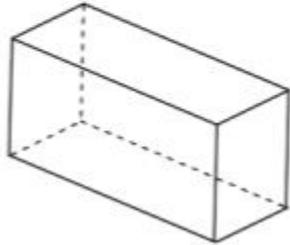
De quelle somme disposera-t-elle au total après un an ?

Doc Méthodes en Pratique

Exemples - Proportionnalité

Un agriculteur produit des bottes de paille parallélépipédiques.

Information 1 : Dimensions des bottes de paille : 90 cm × 45 cm × 35 cm.



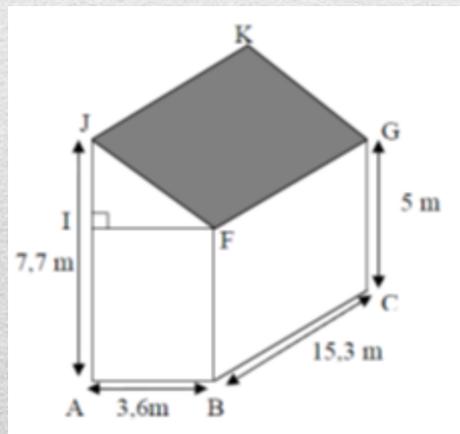
Information 2 : Le prix de la paille est de 40 € par tonne.

Information 3 : 1 m³ de paille a une masse de 90 kg.

- 1) Justifier que le prix d'une botte de paille est 0,51 € (arrondi au centime).
- 2) Marc veut refaire l'isolation de la toiture d'un bâtiment avec des bottes de paille parallélépipédiques. Le bâtiment est un prisme droit dont les dimensions sont données sur le schéma ci-dessous.

Il disposera les bottes de paille sur la surface correspondant à la zone grisée, pour créer une isolation de 35 cm d'épaisseur. Pour calculer le nombre de bottes de paille qu'il doit commander, il considère que les bottes sont disposées les unes contre les autres. Il ne tient pas compte de l'épaisseur des planches entre lesquelles il insère les bottes.

- a) Combien de bottes devra-t-il commander ?
- b) Quel est le coût de la paille nécessaire pour isoler le toit ?



Exemples - Proportionnalité

De ces deux promotions, laquelle est la plus intéressante ?
Présente la démarche utilisée.



Que penses-tu de celle-ci ? Explique ta réponse.



Académie de Clermont-Ferrand

Exemples - Proportionnalité

Pratiquer une démarche scientifique

Capacités susceptibles d'être évaluées en situation

Rechercher, extraire et organiser l'information utile

Observer, recenser des informations
Organiser les informations pour les utiliser : reformuler, traduire, coder, décoder.

Réaliser, manipuler, mesurer, calculer, appliquer des consignes

Calculer.

Raisonner, argumenter, pratiquer une démarche expérimentale ou technologique, démontrer

Proposer une démarche de résolution : formuler un problème ; comparer une situation à un modèle connu ; émettre une hypothèse ; faire des essais ; choisir, adapter une méthode.

Exploiter les résultats : confronter le résultat obtenu au résultat attendu ; valider ou invalider l'hypothèse.

Présenter la démarche suivie, les résultats obtenus, communiquer à l'aide d'un langage adapté

Présenter, sous une forme appropriée, une situation par un texte écrit ; à l'oral.

Exemples - Proportionnalité

Savoir utiliser des connaissances et des compétences mathématiques	Capacités susceptibles d'être évaluées en situation
Organisation et gestion de données	Relier pourcentages et fractions. Appliquer un pourcentage.
Nombres et calculs	Mobiliser des écritures différentes d'un même nombre. Comparer des nombres. Mener à bien un calcul instrumenté (calculatrice, tableur). Conduire un calcul littéral simple.

Niveaux	Connaissances	Capacités
3 ^e	Proportionnalité	Établir le lien entre appliquer un pourcentage et multiplier par le coefficient correspondant.
	Calcul littéral	Réduire une expression littérale à une variable.

**Apprendre la proportionnalité,
plus qu'apprendre des procédures,
c'est apprendre à raisonner.**



Quelques commentaires par rapport aux progressions
concernant la proportionnalité.

Pour dégager la notion de proportionnalité, la donnée de tableaux complétés en rapport ou non avec des situations concrètes, est la méthode la plus courante et on se limitera alors le plus souvent à des **techniques purement calculatoires**. Dans une mise en forme artificielle (tableau), **l'élève calcule uniquement pour remplir des cases**.

Or dans la vie courante, l'élève se trouvera souvent face à des situations qu'il devra apprécier comme étant proportionnelles ou non sans tableau.

Exemples

4 Complète ce tableau de proportionnalité qui indique les tarifs à l'entrée d'un cinéma.

Nombre de personnes	7	13	5		
Prix payé (en €)	45,50			65	71,50

19 Recopie et complète les tableaux de proportionnalité suivants en effectuant des calculs sur les colonnes.

a.

0,2	0,4	0,6	0,8	6	14
6,5					

Une entreprise propose plusieurs types de béton selon la masse de gravier, de sable et de ciment qu'il comporte.

	Gravier	Sable	Ciment
Béton A	21 kg	10 kg	9 kg
Béton B	9 kg	3,5 kg	3 kg
Béton C	11 kg	8,5 kg	9,5 kg

Parmi ces mélanges, quel est celui qui comporte...

- a.** la plus grande proportion de gravier ?
- b.** la plus grande proportion de sable ?
- c.** la plus grande proportion de ciment ?

Tu justifieras chacune de tes réponses.

Si le tableau de proportionnalité amène à synthétiser la situation, il impose une succession de nombres qui peuvent faire obstacle au raisonnement. Ce n'est **pas forcément un outil « naturel » et pas toujours un outil efficace.**

Il vaut mieux, dans un premier temps, laisser les élèves **explicitier leur raisonnement de façon verbale** ou par **des dessins et des schémas**. Et aboutir au tableau lorsque les raisonnements sont réellement en place.

On sera vigilant à la **précision du langage utilisé** : plutôt que de dire « c'est proportionnel » ou « il s'agit d'une situation de proportionnalité », il sera plus avantageux de préciser quelle est la grandeur qui est (ou n'est pas) proportionnelle à quelle autre grandeur.

Par exemple, *à la pompe le prix payé en euros est proportionnel à la quantité d'essence en litres.*

Comment introduisez-vous la formule de la longueur d'un cercle ?

Une activité permettant d'introduire la formule donnant la longueur d'un cercle en fonction de son diamètre en lien avec la proportionnalité.

La longueur d'un cercle

Faire découvrir par la mesure et le calcul que la longueur d'un cercle vaut environ 3 fois la longueur de son diamètre.



Comment faire pour déterminer la longueur de différents objets ayant un contour circulaire ?



La longueur d'un cercle

- 1) A l'aide d'un fil et d'un mètre, tu vas, à la maison, mesurer la longueur de différents objets circulaires. Complète le tableau ci-dessous, rajoute d'autres objets.

Objet	Longueur en cm	Diamètre en cm	
Pièce de 50 centimes			
Grande assiette ronde			
Petite assiette ronde			
Rouleau de Scotch			
Boîte de conserve			
Roue d'un vélo			

Avec un tableur ou la calculatrice, on calcule le quotient.

- 2) Avec une calculatrice, détermine pour chaque objet de ton tableau le quotient Longueur / Diamètre. Tu écriras tes réponses arrondies au centième dans la troisième colonne. Une fois ton tableau complété, qu' observes-tu ? Écris tes observations, peux-tu expliquer.

Mes observations – Mes explications

La longueur d'un cercle

La proportionnalité permet alors d'introduire la « formule » permettant de calculer la longueur d'un cercle et de lui donner du sens.

	A	B	C	D
1	Objet	Longueur en cm	Diamètre en cm	Quotient
2	grande assiette ronde	87,9	28	$\approx 3,14$
3	petite assiette ronde	62,8	20	3,14
4	rouleau de Scotch	14,1	4,5	$\approx 3,13$
5	sous-tasse ronde	28,2	9	$\approx 3,13$
6	boite de conserve	31,4	10	3,14
7	roue d'un vélo	204,1	65	3,14

La proportionnalité est un fil conducteur pour travailler la résolution de problèmes, l'esprit critique, la prise d'initiative et l'autonomie.

Voyons quelques exemples,

AU MARCHE

David est un élève de sixième. David aime bien aider ses parents. Ce qu'il préfère, c'est aller au petit marché proche de la maison pour acheter des fruits et légumes. D'habitude, sa mère lui donne la liste des courses et de l'argent.



David est parfaitement responsable ; il aime vérifier si sa mère lui a donné suffisamment d'argent pour tout acheter. Cependant, il n'aime pas aller au marché avec trop d'argent sur lui.

Combien d'argent la mère de David devra-t-elle lui donner ?

3 kg de dachines

1.5 kg d'oranges

1/2 kg de tomates

4 bananes

des citrons

2 kg de patates douces

Académie de la Guyane

Proportionnalité et esprit critique



Après cinq semaines, "Bienvenue chez les Ch'tis" a réalisé 16.500.000 entrées, rapporte lundi le journal nordiste "La Voix du nord".

Le film de Dany Boon, *Bienvenue chez les Ch'tis*, sorti depuis 5 semaines, risque de détrôner prochainement *La Grande Vadrouille* (1966), le film français le plus vu au cinéma. Après cinq semaines, *Bienvenue chez les Ch'tis* a réalisé 16.500.000 entrées, rapporte lundi le journal nordiste *La Voix du nord*.

La Grande Vadrouille avait attiré 17,2 millions de téléspectateurs lors de sa sortie. Le film de Dany Boon, surprise du cinéma français cette année, pourrait même dépasser *Titanic* qui détient le record en France avec un peu plus de 20 millions d'entrées. (belga)



"La Grande Vadrouille", de Gérard Oury avec Bourvil et Louis De Funès avait attiré 17,2 millions de téléspectateurs lors de sa sortie.

Finalement, *Bienvenue chez les Ch'tis* a réalisé 20 479 826 entrées en salles.

Lequel de ces deux films a eu le meilleur succès ?

La proportionnalité fait l'objet d'un apprentissage continu et progressif sur les quatre années du collège et permet de comprendre et de traiter de nombreuses notions du programme.

La Proportionnalité dans les différents domaines

La proportionnalité fait l'objet d'un apprentissage continu et progressif sur les quatre années du collège et permet de comprendre et de traiter de nombreuses notions du programme.

	Cycle 3 – CM2	6 ^{ème}	5 ^{ème}	4 ^{ème}	3 ^{ème}
O G D	<p>Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité et notamment des problèmes relatifs aux pourcentages, aux échelles, aux vitesses moyennes ou aux conversions d'unité, en utilisant des procédures variées</p> <p>Représentations graphiques</p>	<p>Reconnaître les situations qui relèvent de la proportionnalité :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Passage par l'unité ou « règle de trois » • Utilisation d'un rapport de linéarité • Utilisation d'un <u>coeff. de propor.</u> <p>Appliquer un taux de % :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Sens de l'expression « ... % de ... » <p>Représentations graphiques de données</p>	<p>Proportionnalité :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Propriété de linéarité • Tableau • Passage par l'unité ou « règle de trois » <p>Pourcentage Proportions Échelle</p> <p>Repérage dans le plan</p> <p>Fréquences</p> <p>Représentations graphiques de données</p>	<p>Utilisation de la proportionnalité :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Quatrième proportionnelle • Utilisation d'un <u>coeff. de propor.</u> • Caractérisation de la proportionnalité par l'alignement des points avec l'origine • Pourcentage 	<p>Fonction linéaire</p> <p>Taux d'accroissement</p> <p>Pourcentage d'augmentation ou de diminution</p>
N C	<p>Placement sur une demi-droite graduée de nombres entiers et décimaux</p>	<p>Placement exact ou approché d'entiers naturels, de décimaux ou de quotients sur une demi-droite graduée</p> <p>Écritures fractionnaires</p>	<p>Placement exact ou approché d'entiers naturels, de décimaux ou de quotients sur une demi-droite graduée</p> <p>Écritures fractionnaires</p>	<p>Comparaison de deux nombres relatifs</p> <p>Equations</p>	
G	<p>Agrandissement et réduction de figures</p>			<p>Théorème de Thalès</p> <p>Cosinus d'un angle aigu</p> <p>Agrandissement et réduction de figures</p> <p>Patron de pyramides et de cônes de révolution</p> <p>Théorème de Pythagore</p>	<p>Théorème de Thalès</p> <p>Trigonométrie</p> <p>Agrandissement et réduction de figures</p>
G M	<p>Conversion d'unités</p> <p>Calculs de durées</p> <p>Longueur du cercle</p>	<p>Changements d'unités</p> <p>Calculs de durées</p> <p>Longueur du cercle</p>	<p>Changements d'unités</p> <p>Relation entre aire d'une figure ou volume d'un solide et une de ses dimensions lorsque les autres sont fixées</p>	<p>Relation entre aire d'une figure ou volume d'un solide et une de ses dimensions lorsque les autres sont fixées</p> <p>Relation $d = vt$</p> <p>Changements d'unités de vitesse</p>	<p>Changements d'unités sur des grandeurs produits ou quotients</p>

Le problème présenté dans cette partie peut être proposé en cycle 3 et au collège. Les procédures de résolution proposées ne sont pas pour autant considérées comme de plus en plus expertes, le but étant seulement d'illustrer les multiples facettes de la notion. Bien entendu, les valeurs numériques peuvent être adaptées au niveau des élèves.

Exemple : On dispose d'un lot de billes toutes identiques. L'enseignant pèse un paquet de 12 billes. Il trouve 63,6 g. Quelle est la masse d'un lot de 18 billes ?
De 6 billes ? De 51 billes ?

Procédures envisageables au cycle 3

Linéarité : Si 12 billes pèsent 63,6 g alors 6 billes pèsent $63,6 \text{ g} \div 2 = 31,8 \text{ g}$ (propriété multiplicative avec coefficient \cdot). Et 18 billes ont la même masse que 12 billes et 6 billes, donc 18 billes pèsent $63,6 \text{ g} + 31,8 \text{ g} = 95,4 \text{ g}$.

Retour à l'unité (règle de trois) : Si 12 billes pèsent 63,6 g alors une bille pèse $63,6 \text{ g} \div 12 = 5,3 \text{ g}$. Donc 18 billes pèsent $18 \times 5,3 \text{ g} = 95,4 \text{ g}$ puis 6 billes pèsent $6 \times 5,3 \text{ g} = 31,8 \text{ g}$ et 51 billes pèsent $51 \times 5,3 \text{ g} = 270,3 \text{ g}$.

Procédures envisageables au collège

Linéarité (6e) : On remarque que 12, 18, 6 et 51 sont des multiples de 3... il suffit donc de connaître la masse de 3 billes. Or si 12 billes pèsent 63,6 g alors 3 billes pèsent $63,6 \text{ g} \div 4 = 15,9 \text{ g}$ (propriété multiplicative avec coefficient .). Donc 18 billes pèsent $6 \times 15,9 \text{ g} = 95,4 \text{ g}$ puis 6 billes pèsent $2 \times 15,9 \text{ g} = 31,8 \text{ g}$ et 51 billes pèsent $17 \times 15,9 \text{ g} = 270,3 \text{ g}$. Cette procédure ne diffère pas beaucoup du retour à l'unité...

Les procédures suivantes reposent sur la construction préalable du tableau de proportionnalité qui résume la situation.

La proportionnalité au cycle 3 et au collège

Nombre de billes	12	18	6	51
Masse en gramme	63,6		?	?

Coefficient de proportionnalité (6e, 5e) : Pour passer de la ligne « nombre de billes » à la ligne « masse » on multiplie par 63,6 : $12 \times 5,3 = 63,6$. Il suffit ensuite de calculer...

Produit en croix (4e) : $(18 \times 63,6) \div 12 = 95,4$ puis $(6 \times 63,6) \div 12 = 31,8$ et $(51 \times 63,6) \div 12 = 270,3$.

Utilisation d'un graphique (4e, 3e) : On trace la droite qui passe par $(0 ; 0)$ et par $(12 ; 63,6)$ dans un repère bien choisi (ou sur logiciel) et on lit les ordonnées des points d'abscisses 18, 6 et 51.

Utilisation de la fonction linéaire sous-jacente (3e) : La situation est modélisée par la fonction f définie par $f(x) = 5,3x$. Il suffit de calculer $f(18)$, $f(6)$ et $f(51)$.

Le Nombre au cycle 3

Des documents à votre disposition sur le site Eduscol :

- proportionnalité
- du numérique au littéral
- organisation et gestion de données
- les nombres au collège
- le nombre au cycle 3.

Méthodes en pratique, Mathématiques classe de 4^{ème} et classe de 6^{ème} – Scéren
– CNDP

Académie de Clermont Ferrand, site disciplinaire de mathématiques

IREM de Toulouse – Actes du colloque de 2004

Merci pour votre attention !

Des questions ?

N'hésitez pas à nous contacter :

Ipr.maths@ac-guyane.fr

