Les grandeurs

Étant donné un objet O, on peut lui associer plusieurs grandeurs d'espèces différentes en fonction de plusieurs considérations. Les considérations peuvent être physique, sociale ou purement mathématique.

Par exemple, si on prenait un objet O_1 parmi un ensemble de véhicules V, on peut lui associer les grandeurs : t_1 (durée de parcours), d_1 (distance parcourue), T_1(la température de son moteur), L_1 (sa longueur), ...

Néanmoins, ces grandeurs évoquées ne sont pas toutes additives. En effet, la durée et la longueur sont toujours additives, la distance ne l'est que si la trajectoire est rectiligne et la température n'est jamais additive.

Puis si on voudrait calculer la vitesse d'un véhicule, comment mesure-t-on cette grandeur qui est issue d'un quotient de deux grandeurs ? Y-a-t-il une conséquence sur la proportionnalité en cas de changement d'unités de mesures ? Puis, comment peut-on définir une mesure sur une grandeur ? Serait-il toujours possible ?

Citons une explication de la grandeur de NICOLAS ROUCHE dans « *Le sens de la mesure* » :

dans la pensée commune, il y a d'abord des objets, et la grandeur est considérée comme une propriété de ceux-ci. Cependant, lorsqu'on mathématise l'idée de grandeur, on ne peut pas en faire un attribut absolu des objets. Au contraire, on ne définit pour commencer que des relations entre objets, à savoir une relation d'égalité (appelée plus précisément « équivalence ») et une relation d'ordre (est plus petit que). On considère d'abord un ensemble d'objets de même nature (par exemple l'ensemble des objets allongés, ou l'ensemble des objets lourds, etc.), puis les sous-ensembles dont chacun est formé de tous les objets équivalents à l'un d'eux. On dit alors que chacun de ces sous-ensembles est une grandeur.

Formulons, alors, ces propos, avec un formalisme mathématique.

On considère un ensemble $\mathcal{O}$ d'objets et on définit une relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathcal{O}$, définie par :

$$\forall o_1, o_2 \in \mathcal{O}, \quad o_1 \sim o_2 \Leftrightarrow o_1 \text{ et } o_2 \text{ ont la même grandeur}$$

Pour pouvoir dire que deux objets ont même grandeur ou pas et puis les comparer, on définit une relation de préordre total $\prec$ associée à $\sim$ de la manière suivante :

$\forall\ o, p, q \in \mathcal{O}$:

- un et un seul des énoncés $o \prec p$, $p \prec o$, $o \sim p$ est vrai.
- si $o \prec p$ et $p \prec q$ alors $o \prec q$.

Pour pouvoir définir la grandeur d'une collection d'objets en fonction de la grandeur de chaque objet, on définit sur $\mathcal{O}$ une relation binaire notée $\oplus$, telle que :

- $o \oplus p$ est définie si, et seulement si, $o \neq p$;

- si $o \neq p$, alors $o \oplus p \sim p \oplus o$, et si de plus, $o \neq q$ et $p \sim q$, alors $o \oplus q \sim p \oplus q$;

- si $(o \oplus p) \oplus q$ et $o \oplus (p \oplus q)$ sont définis, alors $(o \oplus p) \oplus q \sim o \oplus (p \oplus q)$.

On suppose enfin que sont satisfaites trois conditions unissant $\sim, \prec$ et $\oplus$:

- si $o \neq p$, alors $o \prec p \oplus q$;

- si $o \prec q$, alors il existe p tel que $o = p \oplus q$;

- pour tout o et tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $p_1, p_2, \cdots, p_n$ tels que $p_1 \sim \cdots \sim p_n$, $p_1 \oplus \cdots \oplus p_n$ est défini et $o \sim p_1 \oplus \cdots \oplus p_n$ (qui traduit la possibilité de subdiviser une grandeur en n autres grandeurs égales).

À partir de cette construction on définit une grandeur G comme étant l'ensemble $G = \mathcal{O}/\sim$

Grâce à la structure $(\mathcal{O}, \sim, \prec, \oplus)$, on définit alors sur G :

- un ordre total noté $<$;

- une addition notée $+$;

- une soustraction notée - ;

- une division par un entier naturel non nul définie de la manière suivante : si $p \sim p_1 \sim \cdots \sim p_n$, avec $o \sim p_1 \oplus \cdots \oplus p_n$, alors $\overline{p} = \dfrac{\overline{o}}{n}$.

$\overline{p}$ et $\overline{o}$ sont les classes d'équivalences respectives de p et o.