Modéliser

La compétence « Modéliser », si on la prend dans son acception la plus large, renvoie pour le mathématicien au fait d'utiliser un ensemble de concepts, de méthodes, de théories mathématiques qui vont permettre de décrire, comprendre et prévoir l'évolution de phénomènes externes aux mathématiques.

Les mathématiques et le monde réel, une longue histoire

La compétence « Modéliser » est, parmi les compétences travaillées, celle qui aborde de front le lien des mathématiques avec un extérieur à la discipline. Définir précisément cet extérieur n'est pas chose aisée, car il n'est pas certain qu'on puisse simplement l'envisager ou le nommer sans disposer déjà d'un minimum de concepts, de théories, de modèles déjà plus ou moins liés aux mathématiques. Ceci étant, quel que soit le terme utilisé (monde naturel, monde empirique, réalité extérieure, monde réel, référence, contexte), la modélisation fait intervenir un élément non mathématique au début et à la fin du processus. On peut en effet décrire de manière schématique le processus de modélisation en distinguant trois temps : la mise au point d'un modèle à partir du réel, le fonctionnement du modèle lui-même à l'intérieur des mathématiques, et la confrontation des résultats du modèle au réel[1].

Ainsi décrite, on peut remarquer que cette compétence de modélisation n'est pas développée qu'à partir du cycle 4. Dès le cycle 2, la simple reconnaissance des formes géométriques dans les objets réels ressortit à la première étape de la modélisation (« le rectangle modélise le terrain sur lequel on veut construire une maison »). Reproduire et transformer les figures obtenues relève alors de la deuxième étape. Quant à la troisième étape, elle est également présente, même si les situations modélisées restent modestes. C'est véritablement aux cycles 3 et 4 que les trois phases de la modélisation vont pouvoir progressivement gagner en ampleur. La première phase devient l'objet d'un véritable choix pour l'élève, qui dispose de différents modèles parmi lesquels il lui revient de déterminer quel est le plus pertinent (« s'agit-il ou non d'une situation où le modèle proportionnel s'applique ? »). Ce qui change est donc en premier lieu la diversité des modèles disponibles que l'élève peut convoquer pour décrire une situation, au travers par exemple de l'apparition des modèles probabilistes et fonctionnels. Mais c'est aussi et surtout la complexification de ces modèles qui va permettre à la deuxième phase de gagner en ampleur. Le rectangle qui modélise le terrain est toujours aussi pertinent, mais le modèle dans lequel il s'insère s'est profondément transformé entre le cycle 2 et le cycle 4. Ce rectangle est à présent lié à des propriétés de figures, à de nouvelles possibilités de calculs (par exemple la longueur de la diagonale par le théorème de Pythagore), à des concepts comme l'aire ou le périmètre qui ouvrent de nouveaux champs de questions,

1. Dans une version plus élaborée, cette dernière phase boucle sur la première, en construisant une version améliorée du modèle.

à une possibilité de faire évoluer le modèle suivant des contraintes par le biais de l'algèbre, puis du langage fonctionnel (« un côté doit être le double de l'autre, l'aire doit être fixée... »). Cette complexification des modèles utilisés rend nécessaire de faire travailler les élèves, dans un premier temps, sur des exercices internes au modèle en tant que tel (exercices de probabilités, exercices sur les fonctions) pour en comprendre la logique interne et en maitriser l'usage avant de l'utiliser comme outil de traitement d'un problème externe.

L'apparent paradoxe du cycle 4 est ainsi que le développement de la compétence « Modéliser » fait passer une compréhension plus fine du réel par un progrès dans les capacités d'abstraction des élèves. Ainsi, c'est par une conceptualisation et une formalisation de la notion naturelle de « chance » en termes de probabilités que l'on parvient à modéliser les situations dépendant du hasard. Paradoxe apparent qui est au cœur du progrès du savoir mathématique, la plus grande abstraction allant de pair avec la plus grande capacité de rendre compte de la complexité du réel. Pour des élèves à qui on demande un effort d'abstraction et de manipulation de concepts, il est important de connaitre et d'éprouver régulièrement l'efficacité des outils qu'ils apprennent à maitriser, au travers en particulier de cette troisième phase de confrontation des résultats du modèle avec la réalité empirique. Entretenir la compétence « Modéliser », c'est aussi entretenir la confiance que les élèves ont dans l'enseignement qui leur est proposé : découvrir qu'un modèle géométrique permet de donner une bonne approximation du rayon de la Terre fait partie de ces expériences qui contribuent à façonner auprès de l'élève de collège une image positive et utile des mathématiques.

Lire le grand livre de l'Univers : mathématiques et sciences

Parce qu'elle a trait au réel, la compétence « Modéliser » rencontre naturellement les disciplines dont le principe même est la compréhension du monde naturel : les sciences, qu'elles soient physiques, technologiques ou sciences du vivant. Mais qu'ont à dire de spécifique les mathématiques dans une affaire où elles peuvent n'apparaitre que comme un outil ? Il faut ici relire la phrase célèbre de Galilée[2] :

> La philosophie est écrite dans ce livre gigantesque qui est continuellement ouvert à nos yeux (je parle de l'Univers), mais on ne peut le comprendre si d'abord on n'apprend pas à comprendre la langue et à connaître les caractères dans lesquels il est écrit. Il est écrit en langage mathématique, et les caractères sont des triangles, des cercles, et d'autres figures géométriques, sans lesquelles il est impossible d'y comprendre un mot. Dépourvu de ces moyens, on erre vainement dans un labyrinthe obscur.

Amener les élèves à comprendre et parler ce langage, voilà l'une des contributions des mathématiques au développement de la pensée scientifique des élèves de collège. Ce langage est d'abord composé de nombres et de figures, présents dès le cycle 2 : « comprendre le système de numération », « reconnaitre des formes dans les objets réels » sont des objectifs du programme de mathématiques. Mais il s'enrichit au cycle 4 des symboles et de la syntaxe algébriques. C'est bien par la part prise par le calcul littéral que le cycle 4 marque une nouvelle étape dans l'apprentissage de la lecture de l'univers. Et avant le calcul lui-même, l'utilisation de l'écriture littérale constitue l'un des enjeux, « Comprendre l'intérêt d'une écriture littérale en produisant et employant des formules liées aux grandeurs mesurables » indique le programme, qui invite à multiplier les références aux sciences. Quant au calcul

2. Galileo Galilei (1623). Il Saggiatore traduction française de Christiane Chauviré, L'Essayeur, Les Belles-Lettres, Paris, 1980.

algébrique, c'est l'un des objectifs du cycle 4 que de permettre aux élèves d'en découvrir progressivement la puissance en termes d'abstraction, de généralisation et d'automatisation des calculs, en particulier au travers de problèmes du premier degré.

De la quatrième proportionnelle aux fonctions linéaires

Le modèle proportionnel, déjà présent au cycle 3, évolue au cycle 4 dans le sens d'une plus grande abstraction. Les situations à modéliser diffèrent peu, mais c'est le traitement mathématique de la modélisation qui évolue. Au travers d'un plus grand nombre de registres (graphiques, tableaux, coefficient multiplicateur, formule) et au travers d'une utilisation plus fine des propriétés de linéarité sous-jacentes à la situation de proportionnalité, pour aboutir enfin à la notion complètement décontextualisée de fonction linéaire où dans la formule $f(x) = ax$, ni a ni x ne renvoient nécessairement à un élément du monde réel. Dans ce parcours, c'est véritablement l'activité intra mathématique de création de concepts qui est à l'œuvre, permettant de faire naitre un objet, la fonction linéaire, dont le caractère dégagé de tout lien avec un contexte donné multiplie la puissance de modélisation (ne serait-ce que par la capacité d'automatiser les calculs). Faire percevoir aux élèves le gain réalisé au prix de l'effort d'abstraction doit être là encore une préoccupation de l'enseignant face à l'élève qui peut demander pourquoi on ne se contente pas des tableaux qui ont fait leurs preuves.

Probabilités

« Aborder les questions relatives au hasard à l'aide de problèmes simples » est un des objectifs du programme de cycle 4. Pour autant, la simplicité des problèmes ne doit pas cacher la complexité du modèle proposé. Il convient de ne pas précipiter le passage au modèle probabiliste et aux calculs à l'intérieur de ce modèle, et il convient surtout de ne pas prendre les calculs menés à l'intérieur du modèle pour des preuves ou des démonstrations de phénomènes réels. On ne prouve pas que « le dé est truqué », ou qu' « il vaut mieux miser sur l'obtention d'un 7 comme somme de deux dés que sur l'obtention d'un 2 », mais on effectue des calculs à l'intérieur du modèle mathématique qui aboutissent à une conclusion mathématique rigoureuse. Les conclusions que l'on peut en tirer quant aux dés réels ou aux paris réels ne relèvent pas des mathématiques et doivent être considérées avec recul et prudence. Pour reprendre la phrase radicale d'Einstein, *« Pour autant que les propositions de la mathématique se rapportent à la réalité, elles ne sont pas certaines, et pour autant qu'elles sont certaines, elles ne se rapportent pas à la réalité »*. L'utilisation du modèle probabiliste est une grille de lecture de la réalité, et son rapport avec le réel n'est pas le même que celui d'une théorie physique. L'affirmation « une pièce équilibrée a autant de chances de tomber sur pile ou sur face » n'est pas de même nature que « l'eau bout à 100 degrés » ou « il se forme un précipité rouge en présence de cuivre ». Une conséquence pratique de cette distinction tient dans la nécessité pour les enseignants de bien marquer la différence entre ce qui tient de l'observation (statistique) et ce qui tient de la modélisation théorique en privilégiant un vocabulaire du type « on décide que », « on modélise par » plutôt que « on voit que ». Parce qu'il rend compte de l'activité humaine, parce qu'il peut appuyer des décisions collectives ou des choix politiques, le modèle probabiliste doit plus que d'autres faire l'objet d'une sensibilisation des élèves à la prudence méthodologique.

Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre !

La géométrie des figures, déjà évoquée, gagne elle aussi en abstraction au cycle 4 en s'éloignant de l'expérience sensible. Ce sont des triangles qu'on tenait auparavant dans la main après les avoir découpés et qui tiennent à présent tout entier dans les trois lettres ABC. Ce sont des solides qu'on va pouvoir décrire par des vues de coupes, des représentations en perspective sans les avoir matériellement sous les yeux. Ce travail progressif d'abstraction, qui ne peut s'envisager au cycle 4 sans aller-retour avec la matérialité des solides concrets, ouvre non seulement la voie vers le raisonnement déductif, mais aussi vers la modélisation géométrique de l'espace. Cette modélisation de l'espace se manifeste au cycle 4 en particulier dans le repérage sur la sphère terrestre mais aussi au travers des calculs que cette modélisation permet (estimation du rayon de la terre et de la distance de la terre à la lune).

Mais cette géométrie de l'espace marque également profondément l'art, depuis les proportions des temples grecs jusqu'aux architectures contemporaines en passant par la révolution cézanienne : « *Permettez-moi de vous répéter ce que je vous disais ici : traitez la nature par le cylindre, la sphère, le cône [...]* »[3] et au-delà. C'est peut-être au cœur du plaisir esthétique, des notions d'harmonie et de symétrie, que le passage progressif à une géométrie des propriétés et des rapports trouve une de ses récompenses les plus précieuses : au travers de quelques tracés sur une toile de Leonard de Vinci, ou par l'imposition de transformations bien choisies sur une frise du palais de l'Alhambra, les mathématiques apportent leur concours à la compréhension des règles de l'art.

La modélisation au risque du projet

La modélisation, si on souhaite permettre aux élèves d'en comprendre les enjeux, nécessite dans l'idéal de partir d'un problème extra-mathématique, de construire un modèle, de le faire fonctionner et de pouvoir confronter ses résultats à la situation modélisée. Deux écueils apparaissent immédiatement :

- le temps nécessaire pour laisser les élèves réfléchir, émettre et confronter des hypothèses peut dépasser le cadre de la séance ;
- les modèles mathématiques permettant de rendre compte de situations réelles peuvent apparaitre comme hors de portée des élèves de collège.

Face à ces deux difficultés, deux possibilités s'offrent, qu'il convient de combiner car elles ont chacune leurs avantages et leurs inconvénients.

La première piste consiste pour l'enseignant à prendre en charge une partie de la modélisation en présentant une situation déjà simplifiée, voire en partie modélisée. Cette possibilité a l'avantage de diminuer fortement le temps nécessaire pour appréhender la situation et de proposer un cadre où l'on sait que l'élève a les moyens d'effectuer un travail de modélisation. Elle peut toutefois conduire à des situations tellement artificielles et caricaturales qu'elles finissent par ne plus rien modéliser. Il est donc important de présenter aux élèves les raisons qui ont présidé au choix du modèle, de les amener à le critiquer de manière argumentée, et d'évoquer lorsque cela est possible des outils et des concepts qu'ils rencontreront plus tard et qui permettront d'améliorer le modèle.

La deuxième piste consiste à garder l'idée de la confrontation à la complexité du réel en pariant sur le temps long du projet, que ce soit au sein du cours de mathématiques ou dans le cadre d'un EPI. Si cette modalité constitue pour le développement de la compétence « modéliser » un terrain a priori idéal, il faut cependant garder à l'esprit les risques inhérents à la conduite des projets, que nous rappelle un chercheur comme Jean-Yves Rochex[4] :

3. Paul Cézanne, Lettre à Émile Bernard, 15 avril 1904.

4. Extrait de l'audition au CSE du 6 janvier 2015, reprise dans le rapport de l'Inspection générale Grande pauvreté et réussite éducative (J.P. Delahaye, mai 2015)

> [...] la question n'est pas simplement de savoir si nous sommes en mesure de proposer des projets et des activités attractives pour les élèves, mais aussi de savoir si ces activités sont productrices d'apprentissages et de dispositions durables, qui restent une fois le projet accompli, une fois le spectacle donné [...].Comment veiller à ce que la réalisation d'un projet collectif ne se concrétise pas par une division sociale du travail entre élèves, qui spécialise les élèves les plus faibles dans les tâches les moins intéressantes sur le plan intellectuel, les élèves les plus performants dans les tâches les plus intéressantes ?

Ces points de vigilance étant posés, il apparait indispensable de demander aux élèves un retour réflexif régulier sur les mathématiques rencontrées (quelles notions mathématiques, connues ou inconnues ai-je rencontrées ?) et au moins en fin de projet, de garder un temps de reprise et d'institutionnalisation par l'enseignant des concepts mathématiques à l'œuvre, afin que, pour tous les élèves, les éléments de savoir mathématique qui sous-tendent la modélisation apparaissent clairement, dégagés de la multiplicité d'expériences, de souvenirs, de sensations qui constituent pour eux la trace sensible du projet.

Décrire le monde : un enjeu au carrefour des domaines du socle

La compétence « Modéliser » constitue pour l'élève de cycle 4 un enjeu qui rencontre les 5 domaines du socle : elle illustre la puissance du langage mathématique dans sa capacité de mise en ordre et de description du monde, elle constitue une mise en œuvre des méthodes mathématiques de raisonnement hypothético-déductif, elle participe à la formation d'un citoyen éclairé, elle constitue le langage des grands systèmes scientifiques, et elle représente, notamment au travers de la géométrie et des probabilités, un outil indispensable de compréhension de l'activité humaine.

Cette omniprésence ne rend pas pour autant facile pour les élèves la maitrise de cette compétence, qui peut être cachée dans la diversité des activités mathématiques. Il revient à l'enseignant, au-delà des projets, des EPI, des exercices quotidiens, de mettre au jour les modalités, la puissance et les limites de la modélisation mathématique.

Bibliographie et sitographie

- De la modélisation du monde au monde des modèles (1) et (2) : Le délicat rapport « mathématique-réalité » et Des statistiques aux probabilités - DUPERRET,J.-C. (2012). Bulletins verts de l'AMPEP 484 et 486.
- Site du Projet européen Lema (Learning and Education in and through Modelling and Applications).
- Interdisciplinarité et modélisation, un atout et un défi pour l'enseignement des mathématiques - ARTIGUE, M. (2016), séminaire de l'IREM Paris 7.