Théorie des proportions dans les *Éléments* d'Euclide

Voici un extrait du livre V des *éléments* d'EUCLIDE :

> On dit de quatre grandeurs, a; b; c; d, prise
> la première e
> sième e
> première et de la troisième grandeur e
> tivement soit supérieur, soit égal, soit inférieur à n'importe quel
> autre équimultiple de la deuxième et de la quatrième grandeur.

En traduisant cette définition avec le langage mathématique moderne on obtient la définition suivante :

> Les rapports $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$ sont égaux si pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, on a l'un des trois cas suivants :
>
> *(i)* $qa < pb \Leftrightarrow qc < pd$
>
> *(ii)* $qa > pb \Leftrightarrow qc > pd$
>
> *(iii)* $qa = pb \Leftrightarrow qc = pd$

EUCLIDE ne considérait que les grandeurs commensurables et homogènes, autrement dit, les grandeurs de même type dont leur rapport est un nombre rationnel. De plus, un rapport de grandeurs $\dfrac{a}{b}$ n'a pas de notion propre à lui et il est vu par EUCLIDE comme une « manière d'être » entre deux grandeurs homogènes et c'est la notion de proportion qui précise la notion de rapport.

En effet, EUCLIDE ne considère pas le rapport de deux grandeurs $\dfrac{a}{b}$ comme un nombre, mais comme un objet mathématique qu'on ne peut que le comparer à un autre objet de « même type » qui est aussi un rapport de deux grandeurs $\dfrac{c}{d}$.
Finalement, c'est seule la proportion $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ qui nous donne une information quantitative en exhibant deux entiers p et q tels que si $qa = pb$ alors $qc = pd$.

Précisons, toujours selon EUCLIDE, que qa n'est pas un nombre mais c'est un multiple entier de la grandeur a.

Puis voici un deuxième extrait des *Éléments* d'EUCLIDE :

> Si plusieurs grandeurs sont en pro
> antécédent
> somme de tous le

Qu'on pourrait traduire en langage mathématique moderne par la proposition suivante :

$$\text{Si } \frac{a_1}{b_1} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} \text{ alors } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{b_1 + \cdots + b_n}$$

Ici, on est toujours dans la même vision euclidienne évoquée plus haut, et on peut voir cette propriété sous un angle géométrique en considérant des segments dont la grandeur étudiée est la longueur. Donc, la propriété se traduit de la façon suivante :

Si le rapport des longueurs $[A_iB_i]$ par $[C_iD_i]$ sont égaux deux à deux pour tout $i \in \{1; \cdots; n\}$, alors le rapport des longueurs de $[A_1B_1]$ par $[C_1D_1]$ est égal au rapport de la longueur de la juxtaposition des $[A_iB_i]$ par la juxtaposition des $[C_iD_i]$.

Néanmoins, avec les outils actuels, en considérant que $\frac{a_1}{b_1} = k$, où k est un nombre, on peut établir la propriété précédente qu'avec des considérations algébriques. En effet, si $\frac{a_1}{b_1} = k$ et si $\frac{a_1}{b_1} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$, alors pour tout $i \in \{1; \cdots; n\}$ on a $\frac{a_i}{b_i} = k$ et donc $a_i = kb_i$.

Nous en déduisons alors que

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{b_1 + \cdots + b_n} = \frac{kb_1 + \cdots + kb_n}{b_1 + \cdots + b_n} = \frac{k(b_1 + \cdots + b_n)}{(b_1 + \cdots + b_n)} = k$$

.
D'où le résultat de la propriété.