Structure mathématique de l'objet proportionnalité

1. Motivations

Les mathématiques apprises à l'école ou au cours des études supérieures ne sont pas une accumulation de résultats hétéroclites. Les diverses théories qui constituent la géométrie, l'arithmétique, l'algèbre, l'analyse ainsi que la statistique et les probabilités s'appuient souvent les unes sur les autres. Il nous est alors important de connaître ces liens, car se sont eux qui fournissent les principaux moyens de résolution de problèmes. Une pensée fragmentée et cloisonnée pourrait devenir parfois inefficace.

L'objectif de la suite de ce document est de mettre en évidence et d'expliquer un fil conducteur qui traverse plusieurs aspects de la proportionnalité (ou la linéarité). Une mise en place d'un modèle mathématique général nous fournira des moyens « mathématiquement légitimes »pour passer d'un cadre à un autre.

Pour cela prenons un exemple en considérant un matériau qui est l'aluminium. Chaque objet en aluminium possède un volume et une masse et à un même volume correspond toujours la même masse. On pourrait alors présenter la dépendance entre le volume et la masse sous plusieurs aspects :

1) Une fonction linéaire : On considère la fonction qui à chaque volume d'aluminium fait correspondre sa masse. Si on se donne un volume, il suffit de le peser pour avoir sa masse. Réciproquement, à toute masse donnée d'aluminium correspond son volume.
En représentant la masse en fonction du volume dans un repère gradué régulièrement, on obtient une droite passant par l'origine du repère.
On peut additionner les volumes comme on peut additionner les masses. Ainsi la fonction en question fait correspondre une grandeur munie de somme de volumes à une grandeur munie elle aussi d'une somme de masses. Dans ce cas on dit que la fonction est linéaire et la masse p s'exprime en fonction du volume v par la relation $p = kv$, où k est une constante liée à la nature physique de l'aluminium.

2) Combinaison linéaire : Soit un tableau qui contient deux volumes et les masses correspondantes représenté de la manière suivante :

Volume	2,5 dm^3	4,1 dm^3
Masse	6,75 kg	11,07 kg

La somme des volumes a pour masse la somme des masses, et nous pouvons compléter le tableau de la manière suivante :

Volume	2,5 dm^3	4,1 dm^3	6,6 dm^3
Masse	6,75 kg	11,07 kg	17,82 kg

On peut généraliser ce raisonnement en effectuant une combinaison linéaire quelconque au lieu de la somme.

3) Égalité de deux rapports (proportion) : Deux volumes quelconques sont entre eux comme les masses correspondantes. Par exemple 2,5 dm^3 est à 4,1 dm^3 comme 6,75 kg est à 11,07 kg. On exprime cela sous la forme

$$\frac{2,5}{4,1} = \frac{6,75}{11,07}$$

4) Égalité des rapports internes : On passe de 2,5 à 4,1 dm^3 en multipliant 2,5 par $\frac{4,1}{2,5} = 1,64$. Le rapport est le même entre les masses correspondantes : on passe de 6,75 à 11,07 kg en multipliant aussi par 1,64.

5) La règle de trois (passage à l'unité) : Si 2,5 dm^3 pèsent 6,75 kg alors 1 dm^3 pèse $6,75 \div 2,5$ kg, c'est-à-dire 2,7 kg. Donc 4,1 dm^3 pèse $4,1 \times 2,7$ kg, c'est-à-dire 11,07 kg.

6) Le rapport externe (coefficient de proportionnalité) : Dans notre exemple, il s'agit de la masse volumique qui est 2,7 kg/dm^3. On passe d'un volume quelconque à la masse correspondante en multipliant le volume par la masse volumique.
Par exemple : 4,1 dm^3 $\times$ 2,7 kg/dm^3 = 11,07 kg.

Ce sont là plusieurs facettes de la proportionnalité (ou la linéarité), observées sur un exemple particulier et à un niveau d'abstraction assez modéré.
Nous allons, alors montrer, en donnant un modèle mathématique général de la proportionnalité, par quels moyens peut-on passer d'un cadre à un autre dans une situation de proportionnalité.

2. Modèle général de la proportionnalité : grandeurs, mesures et variables numériques

Rappelons la définition originelle de la proportionnalité :

Définition 1 : *Deux grandeurs sont proportionnelles si tout rapport entre deux éléments d'une même grandeur est égal au rapport entre les deux éléments correspondants de l'autre grandeur.*

Or dans la pratique, le traitement de la proportionnalité se fait suivant plusieurs approches différentes pour aboutir finalement au même résultat. En effet, chaque traitement correspond à un cadre choisi.

On dispose alors de deux cadres : arithmétique (en considérant soit les grandeurs soit leurs mesures) ou algébrique (en modélisant la proportionnalité par une fonction linéaire).

Comment peut-on, alors, justifier les différents traitements possibles de la proportionnalité, en fonction du cadre choisi, alors que la première définition de la proportionnalité ne concerne que les grandeurs ?

Pour cela on va établir un modèle mathématique général qui nous permet de justifier le passage d'un cadre à un autre.

Définition 2 :

On considère alors :

- deux grandeurs G_1 et G_2.

- une correspondance C entre G_1 et G_2 (C définit une relation entre les éléments de G_1 et les éléments de G_2).

- deux grandeurs $u_1 \in G_1$ et $u_2 \in G_2$ (elles représenteront les unités respectives de G_1 et G_2).

- deux variables numériques M_1 et M_2 définies respectivement sur G_1 et G_2 à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, vérifiant :

- $M_1(g_1 + g_1') = M_1(g_1) + M_1(g_1')$ pour tous $g_1, g_1' \in G_1$
- $M_2(g_2 + g_2') = M_2(g_2) + M_1(g_2')$ pour tous $g_2, g_2' \in G_2$
- $M_1(u_1) = M_2(u_2) = 1$

(M_1 et M_2 représentent deux mesures définies respectivement sur G_1 et G_2)

- pour tout $x = M_1(g_1)$, on lui associe $y = M_2(g_2)$ tels que $g_2 = \mathrm{C}(g_1)$.

- il existe un nombre k qui dépend de u_1 et u_2 tel que : pour tout couple (x, y), on a $y = kx$.

Avec ces considérations on peut dire que :

1) Les grandeurs G_1 et G_2 sont proportionnelles. $\longleftarrow$ cadre arithmétique des grandeurs

2) Les deux variables M_1 et M_2 sont proportionnelles. $\longleftarrow$ cadre arithmétique des grandeurs mesurées

3) La situation est de proportionnalité. $\longleftarrow$ cadre algébrique ou numérique

M_1 induit une application $\overline{M_1}$ qui à une grandeur $g_1 \in G_1$ associe sa mesure par rapport à la grandeur unité u_1. Avec $M_1(g_1) = x$, on obtient :

$$\begin{array}{rccc} \overline{M_1}: & G_1 & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \times \{u_1\} \\ & g_1 & \mapsto & (x, u_1) \end{array}$$

Autrement dit, (x, u_1) est la mesure de g_1 par rapport à l'unité u_1.

On définit de la même manière :

$$\begin{array}{rccc} \overline{M_2}: & G_2 & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \times \{u_2\} \\ & g_2 & \mapsto & (y, u_2) \end{array}$$

Par la suite $\overline{M_1}$ et $\overline{M_2}$ induisent une application $\overline{k}$ qu'on notera $\overline{k}_{(u_1,u_2)}$ puisque k dépend des unités u_1 et u_2. Soit alors :

$$\begin{array}{rccc} \overline{k}: & \mathbb{R}^+ \times \{u_1\} & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \times \{u_2\} \\ & (x, u_1) & \mapsto & (y, u_2) \end{array}$$

Or la correspondance C nous donne $g_2 = \mathrm{C}(g_1)$, puis avec $x = M_1(g_1)$, $y = M_2(g_2)$ et $y = kx$, on a :

$$\overline{M_2} \circ \mathrm{C}(g_1) = (M_2(\mathrm{C}(g_1)), u_2) = (M_2(g_2), u_2) = (y, u_2) \text{ et } \overline{k} \circ \overline{M_1}(g_1) = \overline{k}(x, u_1) = (y, u_2)$$

On conclut alors que le nombre k rend le digramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[rrr, "\overline{M_1}"] \arrow[ddd, "\mathrm{C}"'] & & & \mathbb{R}^+ \times \{u_1\} \arrow[ddd, "\overline{k}"] \\
& g_1 \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (x, u_1) \arrow[d, mapsto] & \\
& g_2 \arrow[r, mapsto] & (y, u_2) & \\
G_2 \arrow[rrr, "\overline{M_2}"'] & & & \mathbb{R}^+ \times \{u_2\}
\end{tikzcd}$$

Exemple : On considère un véhicule en mouvement rectiligne uniforme, donc de vitesse constante. On sait que la vitesse v est exprimée en fonction de la distance parcourue d et de la durée du parcours t par la formule $v = \dfrac{d}{t}$. Ici, v est un rapport qui est celui de d par t, en tant que rapport de grandeurs et on ne peut pas le voir comme un nombre tant qu'on a pas précisé les unités de mesures de d et t. Par contre, on peut dire dans le cadre des proportions que $\dfrac{d_1}{t_1} = \dfrac{d_2}{t_2}$ pour deux distances associées respectivement à deux durées. Par ailleurs, à partir du moment où on fixe deux mesures respectivement sur les distances et les durées, on peut dans ce cas donner la valeur de la mesure de v. C'est le diagramme précédent qui justifie le passage des grandeurs aux mesures mais dans ce cas la valeur numérique de v n'est pas toujours la même pour des mesures différentes.

Plus généralement, étant données deux unités u_1 et v_1 dans G_1 et deux unités u_2 et v_2 dans G_2, on a le digramme suivant qui résume les différents passages d'une unité de mesure à une autre :

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{R}^+ \times \{v_1\} \arrow[dl] \arrow[ddd, "\overline{k}_{(v_1,v_2)}"] \\
G_1 \arrow[r, "\overline{M_1}"] \arrow[urr, "\overline{N_1}"] \arrow[d, "C"'] & \mathbb{R}^+ \times \{u_1\} \arrow[d, "\overline{k}_{(u_1,u_2)}"] & \\
G_2 \arrow[r, "\overline{M_2}"'] \arrow[drr, "\overline{N_2}"'] & \mathbb{R}^+ \times \{u_2\} & \\
 & & \mathbb{R}^+ \times \{v_2\} \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

On peut voir le digramme ci-dessus comme étant un diagramme de conversion qui justifie l'invariance de la proportionnalité entre les grandeurs par changement d'unités de mesure. Il nous dit aussi que

$$\boxed{k_{(u_1,u_2)} = \frac{M_2(g_2)}{M_1(g_1)}}$$

On arrive finalement au résultat central qu'on pourrait voir comme un modèle unificateur des différents cadres du traitement de la proportionnalité. On peut aussi le voir comme un modèle de passerelles qui nous emmène de la définition d'EUCLIDE de la proportionnalité vers l'algèbre moderne dans son cadre fonctionnel en passant par la notion de mesures de grandeurs qui a été théorisée par LEBESGUE.

Théorème : les définitions 1 et 2 sont équivalentes

Démonstration :
Avant de commencer la preuve, on admet que le rapport des mesures de deux grandeurs de même nature est le même quelque soit le choix de la mesure. Donc le rapport de deux grandeurs est égal au rapport de leurs mesures.

Soient alors, $g_1, g_1' \in G_1$ et $g_2, g_2' \in G_2$ tels que $g_2 = \mathrm{C}(g_1)$ et $g_2' = \mathrm{C}(g_1')$.

On a $\dfrac{g_2'}{g_2} = \dfrac{M_2(g_2')}{M_2(g_2)} = \dfrac{kM_1(g_1')}{kM_1(g_1)} = \dfrac{M_1(g_1')}{M_1(g_1)} = \dfrac{g_1'}{g_1}$.

Donc la définition 2 implique la définition 1.

Réciproquement, si G_1 et G_2 sont proportionnelles au sens de la définition 1, alors pour tous $g_1, g_1' \in G_1$ et $g_2, g_2' \in G_2$ tels que $\dfrac{g_1'}{g_1} = \dfrac{g_2'}{g_2}$, on a :

$\dfrac{M_1(g_1)}{M_1(g'_1)} = \dfrac{M_2(g_2)}{M_2(g'_2)}$ donc $M_2(g_2) = \dfrac{M_2(g'_2)}{M_1(g'_1)} \times M_1(g_1)$.

Or on a avait déjà établi que $k_{(u_1,u_2)} = \dfrac{M_2(g'_2)}{M_1(g'_1)}$ et donc pour tout $g_1 \in G_1$ on a

$$M_2(g_2) = k \times M_1(g_1)$$

.

Ce qui prouve aussi que si G_1 et G_2 sont proportionnelles au sens de la définition 1, alors il existe une application qu'on note K qui à toute mesure x d'une grandeur g_1 de G_1 associe un élément y mesure d'un élément g_2 de G_2. De plus, cette fonction est linéaire.

Corollaire : les grandeurs G_1 et G_2 sont proportionnelles si et seulement si l'application K de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ qui à une mesure d'élément de G_1 associe une mesure d'un élément de G_2 est linéaire.

Finalement en notant $p_{u_1} \circ \overline{M_1} = M_1$ et $p_{u_2} \circ \overline{M_2} = M_2$, on obtient le diagramme commutatif suivant qui schématise la situation de proportionnalité dans trois cadres différents.

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r, "\overline{M_1}"] \arrow[d, "C"'] & \mathbb{R}^+ \times \{u_1\} \arrow[r, "p_{u_1}"] \arrow[d, "\overline{k}"] & \mathbb{R}^+ \arrow[d, "K"] \\
G_2 \arrow[r, "\overline{M_2}"'] & \mathbb{R}^+ \times \{u_2\} \arrow[r, "p_{u_2}"'] & \mathbb{R}^+
\end{tikzcd}$$

$\underbrace{\hphantom{xxxxxxxx}}_{\text{grandeurs}}$ $\underbrace{\hphantom{xxxxxxxx}}_{\text{grandeurs mesurées}}$ $\underbrace{\hphantom{xxxxxxxx}}_{\text{variables numériques}}$

$\underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxxxxxx}}_{\text{cadre arithmétique}}$ $\underbrace{\hphantom{xxxxxxxx}}_{\text{cadre algébrique ou numérique}}$