

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes : les fractions

Objectifs

Au cycle 3, l'élève a découvert la notion de fraction en explorant progressivement différentes conceptions possibles et différents contextes : partage de l'unité, partage de grandeurs, repérage sur une demi-droite graduée, encadrement entre deux entiers consécutifs, expression d'une part d'une quantité, mesures (longueurs, aires). Il a été amené à donner du sens aux nombres décimaux à partir de leur désignation sous forme de fractions décimales ou de somme de fractions décimales. Il a perçu la fraction comme le quotient de deux nombres entiers. Il a utilisé la fraction pour résoudre des problèmes.

Au cycle 4, on s'intéresse au quotient $\frac{a}{b}$ de deux nombres a et b , $b \neq 0$, quelconques, défini comme le nombre dont le produit par b vaut a . Le professeur prendra conscience que cette définition n'est pas d'accès facile, et pourra proposer aux élèves de chercher comment la reformuler.

La « vision-partage » de la fraction continue à être mobilisée. Le terme « vision-partage » est à comprendre au sens où, par exemple, la fraction $\frac{7}{4}$ évoque ce qui est obtenu en partageant l'unité en 4 parts égales et en reportant 7 de ces parts, ce qui correspond d'ailleurs à la lecture sept quarts ($\frac{7}{4}$ c'est 7 fois le quart de l'unité).

L'articulation entre nombres décimaux et fractions est renforcée afin d'assurer la maîtrise de l'écriture de position et des différentes désignations d'un nombre. Progressivement, l'élève est amené à mobiliser la « vision-nombre » de la fraction pour résoudre des problèmes, en lien notamment avec la proportionnalité, pour effectuer des calculs et des comparaisons sur les fractions et les quotients, pour exprimer une fréquence ou une probabilité, pour donner un ordre de grandeur d'un résultat.

Le terme « vision-nombre » est donc à comprendre au sens où, par exemple, le quotient $\frac{7}{4}$ est le nombre dont le produit par 4 vaut 7 et peut être mobilisé, par exemple, pour prouver que $\frac{7}{4} = 7 \times \frac{1}{4}$.

Le document « [Le calcul numérique au collège](#) » proposait, pages 11 et 12, de démontrer, dans le cas général, la propriété relative à la somme de deux quotients de même dénominateur, à savoir $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$, pour tous nombres a , b et c , $c \neq 0$. Une telle démonstration ne peut être travaillée dans sa forme générale qu'avec certaines classes ou certains groupes d'élèves, dans une perspective d'approfondissement. Mais l'élaboration d'un raisonnement utilisant des exemples génériques peut venir en appui d'une remédiation.

La mise en place de techniques de calcul s'appuie en permanence sur le sens et la résolution de problèmes, notamment en liaison avec les autres disciplines scientifiques.

La définition d'un nombre rationnel comme nombre pouvant s'écrire comme quotient d'entiers permet de travailler simultanément sur des entiers, des décimaux, des relatifs et des fractions, sans ordre

particulier entre eux, en construisant ainsi les attendus de fin de cycle 4 relatifs à la notion de divisibilité et aux nombres rationnels.

Liens avec les domaines du socle

La production et l'utilisation de différentes représentations d'une fraction (décompositions additives, multiplicatives, cas des fractions décimales, repérage sur une droite graduée) permettent de conduire intelligemment un calcul mental, posé ou instrumenté (domaine 1). L'explication d'un tel calcul, à l'oral ou à l'écrit, pour valider la démarche qui lui correspond ou montrer son efficacité conduit à argumenter pour convaincre (domaine 3).

La résolution de problèmes issus des sciences et techniques mettant en jeu des fractions (reconnaissance d'une situation de proportionnalité, évaluation d'une proportion, d'un pourcentage, traitement de données statistiques, contrôle de la vraisemblance de résultats) favorisent la compréhension du monde (domaines 4 et 5).

Progressivité des apprentissages

Tout au long du cycle 4, on entretient la « vision-partage » de la fraction. La « vision-nombre » de la fraction est progressivement construite et mobilisée :

- dès le début du cycle, l'élève calcule et compare des proportions, des fréquences ;
- dès le début du cycle, l'élève est entraîné à reconnaître des fractions égales, à raisonner pour justifier que des quotients sont égaux, qu'un quotient est un nombre rationnel ou non, qu'une fraction est décimale ou non ;
- dès le début du cycle, l'élève est conduit à additionner, soustraire et multiplier par un entier des fractions de signe quelconque ;
- progressivement, l'élève est conduit à additionner, soustraire, multiplier et diviser des quotients ; à identifier, exprimer sous différentes formes et/ou justifier qu'un nombre est l'inverse d'un autre ; la progressivité repose principalement sur la nature des nombres mis en jeu ;
- en classe de troisième, l'élève aborde la notion de fraction irréductible.

Stratégies d'enseignement

Les « activités mentales » (calcul mental, autres types de questions flash) contribuent à la construction du sens (« vision-partage » et « vision-nombre » de la fraction) et des automatismes sur les opérations et les comparaisons. Ainsi, il convient, tout au long du cycle 4, de :

- développer la capacité à comparer des nombres sans recourir à une technique chaque fois qu'une comparaison raisonnée peut être réalisée : positionnement des fractions par rapport à des entiers, ordre de grandeur, simplification des fractions pour les rendre facilement comparables ;
- mettre en place la technique de comparaison liée à la réduction au même dénominateur ;
- faire prendre conscience du fait qu'il est possible d'insérer une infinité de nombres rationnels entre deux nombres rationnels donnés.

Sur la durée du cycle, les activités mentales permettent aussi de réactiver des savoirs et savoir-faire ; elles peuvent concourir à une évaluation diagnostique.

Ainsi, par exemple, dès le début du cycle, avant la première séquence sur les fractions, un « Vrai ou Faux » du type suivant permet de réactiver les attendus de fin de cycle 3 :

- $\frac{3}{11} + \frac{8}{11} = 1$;
- $\frac{2}{9} + \frac{8}{9} < 1$;
- il existe plus de 100 quotients, compris entre 1 et 2, ayant 6 comme dénominateur ;
- sept segments de longueurs respectives $\frac{1}{7}$; $\frac{2}{7}$; ... ; $\frac{7}{7}$ alignés bout à bout forment un segment de longueur 4.

Un tel exercice, à vocation diagnostique, peut utilement être intégré dans une « stratégie » d'évaluation et exploité au service de la formation de tous les élèves, par exemple selon le « schéma » suivant :

1. passation du « vrai ou faux » ;
2. collecte des réponses des élèves (en classe ou « hors du temps de classe » au collège via l'ENT en utilisant un l'outil « formulaire », par exemple) ;
3. traitement statistique des réponses et identification des erreurs ;
4. remédiation différenciée ;
5. nouveau temps d'évaluation diagnostique (on répète les étapes 1. à 3., le 1. pouvant prendre une forme différente : calcul mental, autre type de question flash) ;
6. test dans le devoir bilan suivant, entre autres, de ce qui a fait l'objet de l'évaluation diagnostique puis d'une remédiation ;
7. réactivation, au long de l'année, en fonction des besoins des élèves.

Le travail sur l'erreur s'appuie sur un retour au sens, en lien avec la définition du quotient, les ordres de grandeur, la production d'exemples et de contre-exemples et l'apprentissage du raisonnement.

L'oral constitue une aide à la compréhension et participe du traitement de l'erreur (verbalisation de décompositions additives ; mise en œuvre de la définition du quotient ; identification, explication puis rectification d'une erreur).

Ainsi, par exemple, à l'occasion de la résolution d'un problème de partage, quelques élèves ont écrit : « $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{3}{7}$ ». Un travail sur l'erreur doit alors être conduit et porter sur le sens. Il peut consister en :

- *un contrôle du résultat*
modalité pédagogique : question/relance (doute, usage de la calculatrice) du professeur lors de la production écrite ;
- *un questionnement sur la vraisemblance du résultat* (comparaison de $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{7}$ puis question : « en ajoutant un nombre positif à $\frac{1}{2}$, est-il raisonnable de trouver $\frac{3}{7}$? »)
modalité pédagogique : débat en classe ;
- *l'élaboration de la preuve* du fait que $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} \neq \frac{3}{7}$ (mise en œuvre de la définition du quotient de deux nombres, par exemple en faisant calculer le produit de l'un et l'autre des deux membres de l'égalité par 70 – lien avec l'arithmétique)
modalité pédagogique : production écrite individuelle hors du temps de classe ;

- *un approfondissement* : « peut-on trouver une fraction $\frac{a}{b}$ telle que $\frac{1}{2} + \frac{a}{b} = \frac{1+a}{2+b}$? » (production d'exemples)
modalité pédagogique : en classe, réflexion individuelle, travail en groupes, à l'oral : présentation des résultats du groupe par un rapporteur.

Différenciation

Dans ce thème, la différenciation peut notamment consister en :

- un accompagnement spécifique que ce soit pour des travaux en classe ou hors la classe ;
- une action sur les variables didactiques dans le cadre de la résolution de problèmes (exemple : s'il s'agit de calculer le complément à 1 de la somme de deux fractions, selon que l'on choisisse $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ ou encore $\frac{1}{3} + \frac{2}{7}$, le degré de technicité varie ce qui peut conduire à proposer tel ou tel cas à différents élèves en fonction de leurs besoins) ;
- l'élaboration de la preuve d'un résultat général, propriété (somme, produit ou quotient de deux fractions, par exemple) ou solution d'un problème (voir la tâche intermédiaire « Vitesse moyenne lors d'un aller-retour », par exemple), à l'aide d'un exemple générique ; la démonstration dans le cas général pouvant faire l'objet d'un prolongement proposé à certains élèves.

Exemples de situations d'apprentissage

Classes de problèmes

- Activités mentales
- Programmes de calcul
- Problèmes de partage, de repérage
- Calcul sur les mesures de grandeurs (longueurs, aires, volumes, angles, durée, vitesse, masse)
- Problèmes de construction
- Reconnaissance de situations de proportionnalité

Exemples d'activités

- Exemples de questions flash :
 - Exemple 1 : [« Vision-partage » de la fraction](#)
 - Exemple 2 : [Calcul avec les fractions](#)
 - Exemple 3 : [sens du quotient](#)
 - Exemple 4 : [travail sur l'erreur](#)
- Exemple de tâche intermédiaire : [Vitesse moyenne lors d'un aller-retour](#)
- Exemple d'activité avec prise d'initiative : [Âge moyen](#)

Interdisciplinarité

L'interdisciplinarité donne du sens et constitue un levier pour l'apprentissage.

L'emploi des fractions dans les modèles de proportionnalité, le traitement statistiques de données, le calcul de probabilités et le champ des grandeurs et mesures doit conduire à placer les élèves devant des problèmes relevant de ces champs et issus des disciplines scientifiques ainsi que du monde économique et de la vie quotidienne.

Des EPI portant sur les thématiques « Monde économique et professionnel », « Transition écologique et développement durable », « Sciences, technologie et société » et « Corps, santé, bien-être et sécurité » seront l'occasion de construire l'attendu de fin de cycle « Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes ».

Ressources complémentaires

Les ressources proposées ci-après constituent des compléments et des approfondissements utiles pour aborder la notion de fraction avec les élèves. Certains de ces documents ont été produits dans le cadre de l'accompagnement de programmes de mathématiques antérieurs. À ce titre, ces ressources s'inscrivent dans un contexte pédagogique désormais ancien. Néanmoins, elles proposent des éléments toujours pertinents pour aborder le thème des fractions.

- [Le calcul numérique au collège](#)
- [Les nombres au collège](#)
- [Raisonnement et démonstration](#)
- [Le calcul sous toutes ses formes au collège et au lycée](#)
- [Quotients, proportionnalité, grandeurs](#), André Pressiat, (décembre 2002).