Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

Académies de la Guadeloupe, de la Guyane et de la Martinique

Mercredi 15 mars 2017 de 8 heures à 12 heures 10

- Pause de 10 heures à 10 heures 10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices académiques »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices nationaux »). **Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant 12h10**

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Première Partie : Exercices académiques de 8h à 10h

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Les codes*) et 2 (*Les triangles bancals*), les autres traitent les exercices numéros 1 (*Les codes*) et 3 (*Carrées magiques*).

Exercice académique numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Les codes

On considère des **séquences** de lettres vérifiant les propriétés suivantes :

(P1) Chaque séquence est exclusivement composée des lettres M, A et T.

(P2) Toute séquence commence par la lettre M.

(P3) Une séquence ne comporte jamais deux lettres consécutives identiques.

La **longueur** d'une séquence est le nombre de lettres qui la composent.

Exemple. *La séquence MTMAMTAT, est une séquence de longueur 8 et se terminant par la lettre T.*

Pour chaque entier $n \geq 1$, on note :

- s_n : le nombre total de séquences de longueur n ;
- m_n : le nombre de séquences de longueur n qui se terminent par M ;
- a_n : le nombre de séquences de longueur n qui se terminent par A ;
- t_n : le nombre de séquences de longueur n qui se terminent par T.

Les parties I et II peuvent être traitées de façons indépendantes.

Partie I

1. Déterminer m_1, a_1 et t_1.
2. Justifier que $m_2 = 0$, $a_2 = 1$ et $t_2 = 1$.
3. Déterminer m_3 , a_3 et t_3 .
4. Justifier que : $s_5 = 2^4$.
5. On donne : $m_6 = 10$ et $a_6 = t_6 = 11$. En déduire : m_7 et t_7 .

Partie II

Un code est constitué de trois des séquences décrites ci-dessus, toutes les trois de longueur 6. Ainsi, le code ci-dessous est la succession de trois séquences de longueur 6, finissant respectivement par M, A et T :

$$\underbrace{MTATAM}_{séquence\,1}\underbrace{MTMATA}_{séquence\,2}\underbrace{MATAMT}_{séquence\,3}$$

On rappelle que : $m_6 = 10$ et $t_6 = 11$.

Combien existe-t-il de codes différents formés par la succession de :
1. trois séquences identiques finissant par M ?
2. trois séquences différentes finissant par M ?
3. deux séquences identiques finissant par M et une séquence finissant par T (pas nécessairement dans cet ordre) ?
4. deux séquences différentes finissant par M et une séquence finissant par T (pas nécessairement dans cet ordre) ?

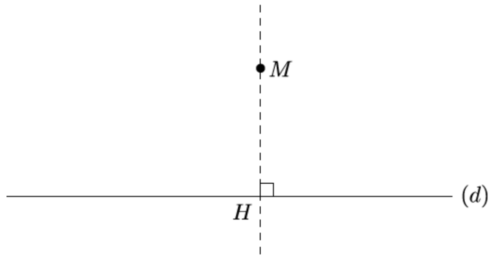
<u>Remarque</u> *: La structure primaire d'une protéine est modélisée par un code de ce type.*

Exercice académique numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Les triangles bancals

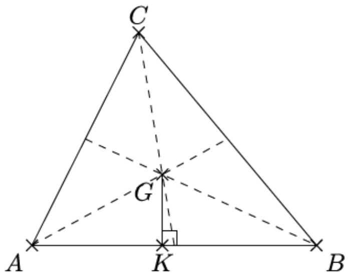
On rappelle tout d'abord les définitions suivantes en géométrie :

- Un angle est aigu si sa mesure est strictement inférieure à 90°.
- Un angle est obtus si sa mesure est strictement comprise entre 90° et 180°.
- Dans un triangle, le centre de gravité est l'intersection des médianes.
- Si (d) est une droite et M un point extérieur à (d), le projeté orthogonal de M sur (d) est le point H de (d) tel que (d) et (MH) sont perpendiculaires.



Soit ABC un triangle et G son centre de gravité. On dit que ABC est **bancal** sur le côté [AB] si le projeté orthogonal de G sur (AB) n'appartient pas au segment [AB].

Dans la figure ci-contre, le triangle ABC n'est pas bancal sur le côté [AB] car le projeté orthogonal K de G sur la droite (AB) appartient bien au segment [AB].



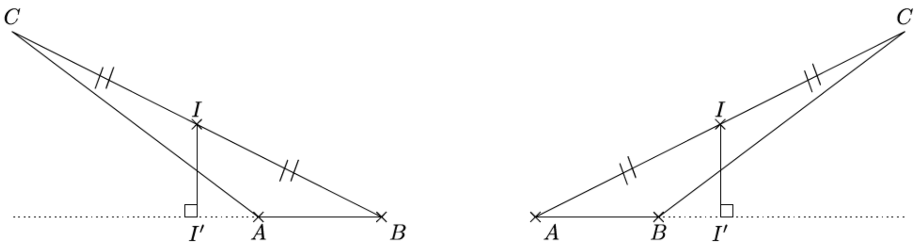
Pour finir on dit qu'un triangle **est bancal s'il est bancal sur au moins un de ses côtés**.

1. Construire un triangle ABC tel que AB = 8 cm, BC = 6 cm et AC = 3 cm et dire s'il est bancal. On n'attend que les constructions comme justification.

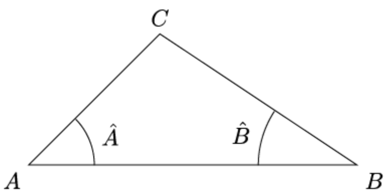
2. Un triangle ABC équilatéral est-il bancal ? Justifier.

3. Un triangle ABC rectangle et isocèle est-il bancal ? Justifier.

On admettra pour la suite que ABC est bancal sur [AB] si et seulement si le projeté orthogonal du milieu de [AC] n'appartient pas à la demi-droite [BA) ou si le projeté orthogonal du milieu de [BC] n'appartient pas à la demi-droite [AB) :



4. On considère un triangle ABC tel que les angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont aigus.

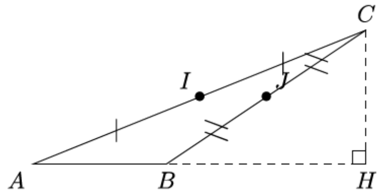


Montrer que ABC n'est pas bancal sur [AB].

5. Qu'en déduisez-vous si un triangle a 3 angles aigus ?

6. On considère un triangle ABC tel que l'angle $\hat{A}$ est aigu et $\hat{B}$ est obtus. On note I le milieu de [AC], J le milieu de [BC], H le pied de la hauteur issue de C et I' le projeté orthogonal de I sur la droite (AB).

On admet que : I' n'appartient pas à la demi-droite [BA) si et seulement si AI' > AB.

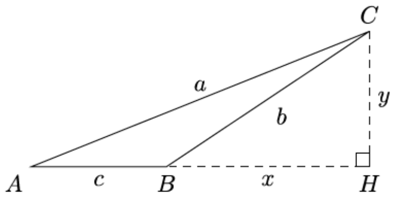


6.1 Justifier que ABC est bancal sur [AB] si et seulement si AH > 2AB.

6.2 En déduire que si ABC est bancal sur [AB] alors [AB] est le plus petit côté du triangle, et de longueur strictement plus petite que les 2 autres cotés.

6.3 On suppose que ABC est un triangle bancal sur [AB]. Peut-il être bancal sur un autre côté ?

6.4 On note a = AC, b = BC, c = AB, x = BH et y = CH.



Montrer que ABC est bancal sur [AB] si et seulement si $a^2 > b^2 + 3c^2$.

7. On appelle triplet bancal tout triplet d'entiers naturels (a,b,c) vérifiant :

$$\begin{cases} a > b > c \\ a < b + c \\ a^2 > b^2 + 3c^2 \end{cases}$$

7.1 Quelle est la plus petite valeur de l'entier a pour laquelle il existe un triplet bancal (a,b,c) ? On précisera alors la valeur du ou des triplet(s) correspondant(s).

7.2 Écrire un algorithme qui prend en entrée un entier naturel n et qui affiche tous les triplets bancals (a,b,c) vérifiant $n \geq a > b > c$.

Exercice académique numéro 3 (à traiter par les candidats des séries **autres** que la série S)

Carrés magiques

Mentionnés pour la première fois dans un manuscrit vers 2200 avant JC, les carrées magiques seraient originaires de Chine. Leur utilisation ésotérique et artistique a débuté en Chine, s'est poursuivie dans les civilisations les plus diverses. Des mathématiciens, parmi les plus illustres du 16ème et du 17éme siècle, s'y sont intéressés et les ont étudiés et ceux d'aujourd'hui étudient une généralisation de ces objets magiques dans de plus grandes dimensions.

Un carré magique d'ordre n est composé des nombres entiers consécutifs de 1 à n^2 écrits dans un tableau carré à n lignes et n colonnes. De plus, les sommes des lignes, des colonnes et des deux diagonales sont toutes égales. Cette somme commune est appelée constante magique.
Un exemple de carré magique d'ordre 4 figure dans le célèbre tableau « Mélancolie » du peintre de la Renaissance Albrecht Dürer (1514) :

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Tous les nombres entiers consécutifs de 1 à 16 sont écrits dans le tableau.
Les sommes des lignes, des colonnes et des deux diagonales sont égales à 34. La constante magique est 34.

1. Un autre exemple de carré magique d'ordre 4 *(sans doute le plus ancien, 5ème ou 6ème siècle, figurant dans un temple en Inde)*

Compléter le tableau carré ci-contre pour obtenir un carré magique d'ordre 4. Ce carré magique a une autre particularité : la somme des nombres des carrés 2×2 (à 4 cases) est aussi égale à la constante magique.

			14
	13	8	
16	3	10	5

On démontre qu'il y a 880 carrés magiques d'ordre 4

2. Carrés magiques d'ordre 2
Montrer qu'il n'existe pas de carré magique d'ordre 2.

3. Carrés magiques d'ordre 3

3.1 Montrer que tout carré magique d'ordre 3 a pour constante magique 15. On pourra faire le lien entre la constante magique et la somme de tous les nombres entiers inscrits dans le carré magique.

3.2 Ecrire toutes les sommes égales à 15 dont les termes sont trois nombres entiers distincts choisis entre 1 et 9. Vérifier que vous en trouvez 8.

3.3 En déduire que le nombre situé au centre du tableau carré est 5 et que les nombres situés au milieu des cotés sont impairs.

	impair	
impair	5	impair
	impair	

3.4 Déterminer tous les carrés magiques d'ordre 3.

4. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On admet qu'il existe des carrés magiques à l'ordre n.
Montrer que tous carrés magiques d'ordre n ont la même constante magique et exprimer cette constante en fonction de n.
On pourra utiliser la formule donnant la somme des N premiers entiers naturels non nuls : 1+2+…..N = $\frac{N(N+1)}{2}$

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

Académies de la Guadeloupe, de la Guyane et de la Martinique

Mercredi 15 mars 2017 de 8 heures à 12 heures 10

- Pause de 10 heures à 10 heures 10

Seconde Partie : Exercices nationaux de 10h10 à 12h10

A distribuer à 10h10

Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant 12h10

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices nationaux (10h10-12h10)
A distribuer à 10h10

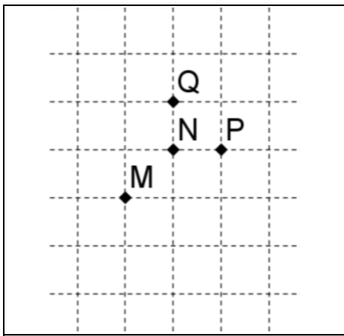
Les candidats traitent deux exercices. Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Saute, saute, sauterelle*) et 2 (*De racines en carrés*), les autres traitent les exercices numéros 1 (*Saute, saute, sauterelle*) et 3 (*Le fabricant de puzzles*).

Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

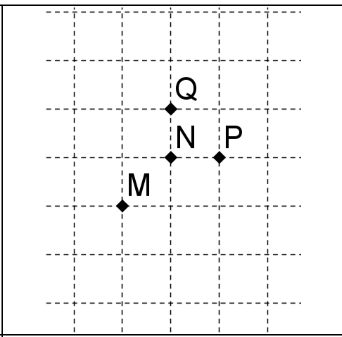
Saute, saute, sauterelle…

Quatre sauterelles sont placées sur un plan. À chaque seconde, une (et une seule) quelconque d'entre elles saute au-dessus d'une autre selon la règle suivante : si la sauterelle placée en A saute au-dessus de la sauterelle placée en B, elle atterrit au point A', symétrique de A par rapport à B.
On représente la situation en utilisant un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Au départ, les quatre sauterelles occupent les sommets – tous à coordonnées entières – d'un carré de côté 1.

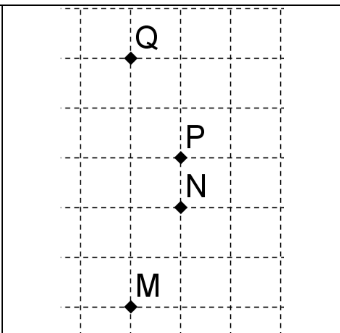
1. Pour chacun des cas suivants, indiquer un exemple de configuration initiale possible en y associant une liste de sauts possibles (l'ordre alphabétique des lettres M, N, P, Q ne préjuge pas de leur disposition initiale).



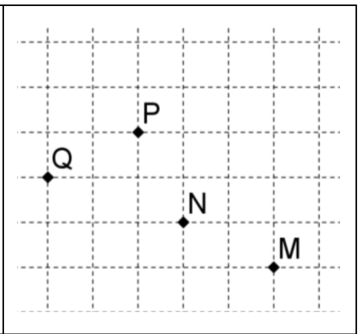
a. *il y a eu deux sauts*



b. *il y a eu quatre sauts*



c. *il y a eu quatre sauts*



d. *il y a eu quatre sauts*

2.1 Est-il possible que les quatre sauterelles soient, au bout d'un certain nombre de sauts, toutes sur le même point ?

2.2. Est-il possible qu'après un certain nombre de sauts les quatre sauterelles se trouvent sur quatre points alignés ?

2.3. Est-il possible que trois sauterelles soient, au bout d'un certain nombre de sauts, sur le même point ?

3.1. Est-il possible qu'après un certain nombre de sauts les sauterelles forment à nouveau un carré ? Donner un exemple.

3.2. Montrer qu'un tel carré a nécessairement pour côté 1.

4. On suppose que les positions de départ sont les points dont les couples de coordonnées sont $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$. On dira qu'une sauterelle est *de type PP* si ses deux coordonnées sont des entiers pairs, *de type PI* si son abscisse est paire et son ordonnée impaire, *de type IP* si son abscisse est impaire et son ordonnée paire, et *de type II* si ses deux coordonnées sont impaires.

4.1. Prouver qu'à tout instant les sauterelles se trouvent sur des points à coordonnées entières, et que chacune a conservé son *type* initial.

4.2. Est-il possible que trois des sauterelles soient à une même distance de la quatrième ?

4.3. Prouver que l'on n'aura jamais trois sauterelles alignées.

Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

De racines en carrés

La *partie entière* d'un nombre est le plus grand entier inférieur ou égal à ce nombre. La partie entière d'un nombre réel x se note $E(x)$. Par exemple $E(4) = 4$ et $E(4{,}3) = 4$. On notera que, lorsque x n'est pas un entier, on a toujours $E(x) < x < E(x) + 1$.

On dit d'un entier naturel qu'il est un *carré parfait* s'il est le carré d'un autre entier.

On souhaite étudier l'algorithme suivant : on considère un nombre N, entier strictement positif différent d'un carré parfait. On lui ajoute la partie entière de sa racine carrée, puis on recommence avec le résultat obtenu. Et ainsi de suite jusqu'à tomber éventuellement sur un carré parfait.

1. En partant de $N = 38$, on obtient successivement $44, 50, 57$ puis 64. Justifier ces résultats.

2. Quel est le premier carré obtenu en partant du nombre 26 ? Celui obtenu en partant du nombre 69 ? D'où partir pour aboutir à 9 ?

3. Soit N un entier strictement positif différent d'un carré parfait. On note systématiquement $n = E(\sqrt{N})$ dans la suite du problème. On pose : $a = N - n^2$.
Montrer que a vérifie : $0 < a < 2n + 1$ et, plus précisément : $1 \leq a \leq 2n$.

4. Dans cette question, on étudie le cas des entiers N pour lesquels $1 \leq a \leq n$. On se donne un entier N vérifiant cette double inégalité, et on nomme $N_1, N_2, N_3, \ldots, N_p$ les nombres obtenus après une, deux,…, p étapes de l'algorithme décrit plus haut à supposer qu'il n'a pas encore terminé.

4.1. Justifier que $N_1 = n^2 + n + a$.

4.2. Montrer que $N_2 = (n + 1)^2 + (a - 1)$.

4.3. Que peut-on en déduire si $a = 1$?

4.4. Si $a \neq 1$, montrer que $N_4 = (n + 2)^2 + (a - 2)$. Que peut-on en déduire si $a = 2$?

4.5. Conclure que, dans tous les cas où $1 \leq a \leq n$, l'algorithme termine.

5. Soit un entier N pour lequel $n + 1 \leq a \leq 2n$. Montrer que $N_1 = (n + 1)^2 + (a - n - 1)$.

6. Démontrer que le processus termine toujours.

7.1. De tous les entiers inférieurs ou égaux à 15 et différents d'un carré parfait, quel est celui qui nécessite le plus d'étapes pour arriver au premier carré ?

7.2. Même question pour les entiers inférieurs ou égaux à 99. On pourra proposer une solution algorithmique, dont on recopiera le programme implanté sur la calculatrice (la fonction partie entière peut y être désignée par les commandes int( ) ou floor ( )).

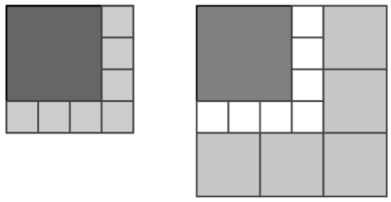
Exercice national numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

Le fabricant de puzzles

Pièces toutes carrées

Un fabricant de puzzles étudie la conception d'un puzzle carré dont les pièces seraient elles-mêmes toutes des carrés – de dimensions diverses si nécessaire – dont les côtés resteraient parallèles aux côtés du carré initial.

Les puzzles représentés ci-contre comportent respectivement 8 et 13 pièces carrées. On se demande pour quelles valeurs de n entier non nul on peut créer un puzzle constitué de n pièces carrées, les pièces pouvant être de dimensions différentes.



1. Représenter des puzzles aux spécifications voulues comportant 4, 6, 7, 9 puis 10 pièces carrées.

2. Pour tout entier n, montrer que si on peut créer un puzzle du carré constitué de n pièces carrées, alors on peut en créer un de $n + 3$ pièces carrées.

3. En déduire que, pour tout entier k, on peut créer un puzzle constitué de $1 + 3k$ pièces carrées.

4. Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on peut créer un puzzle constitué de $3k$ pièces carrées.

5. Déterminer finalement l'ensemble des entiers n pour lesquels on peut créer un puzzle constitué de n pièces carrées.

Pièces en forme de triangles isocèles

On imagine à présent des puzzles carrés constitués de triangles tous isocèles (pas nécessairement identiques).

6. Montrer que, pour tout entier n strictement supérieur à 1, on peut concevoir un puzzle carré constitué de n triangles rectangles isocèles.

7. Concevoir deux puzzles distincts constitués chacun de sept pièces en forme de triangles isocèles non rectangles.

8. Proposer un procédé aboutissant à un puzzle constitué de 2 017 pièces en forme de triangles isocèles non rectangles. On pourra remarquer, en le justifiant, qu'un triangle isocèle peut toujours être découpé en n^2 triangles isocèles, n entier non nul.