RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
Liberté • Égalité • Fraternité

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques 2019

Académies de la Guadeloupe, de la Guyane et de la Martinique

Mercredi 13 mars 2019 de 8 heures à 12 heures10

- Pause de 10h à 10h10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices académiques »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices nationaux »). **Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant 12h10.**

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Première Partie : Exercices académiques de 8h à 10h

La résolution est collective et se fait par équipe de 2 ou 3 élèves.

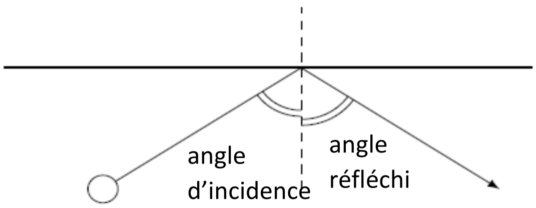
Chaque équipe rend une seule copie.

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Le Billard*) et 2 (*Une histoire de cubes*), ceux des autres séries traitent les exercices numéros 1 (*Le Billard*) et 3 (*Un gros cube … des petits cubes*).

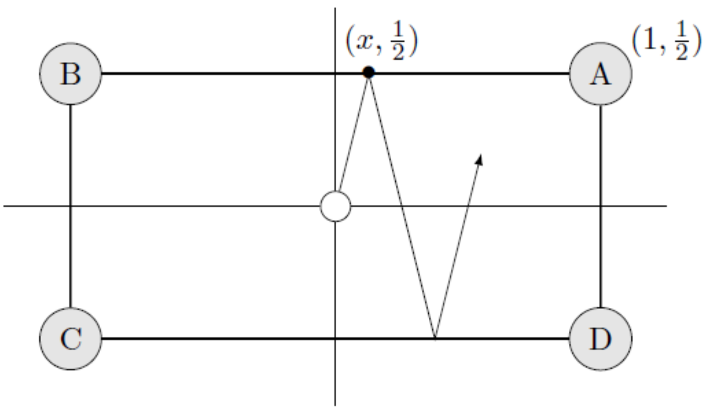
Exercice académique numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Le Billard

Le but de ce problème est d'identifier les points des bandes d'un billard qu'on doit viser afin de faire rentrer une boule, initialement placée au centre, après un nombre n de rebonds, n entier, $n \geq 1$ donné. On supposera que les rebonds sont "parfaits" au sens où ils suivent la loi de Descartes en terme de réflexion : angle d'incidence égal à l'angle réfléchi.



On considère un billard de longueur 2 m et de largeur 1 m. On suppose que le billard ne possède que 4 trous, situés aux 4 coins. On place un repère au centre du billard, avec des axes parallèles aux cotés, appelés bandes. Ainsi, les 4 trous ont pour coordonnées $\left(1;\frac{1}{2}\right)$, $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$, $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$ et $\left(1;-\frac{1}{2}\right)$ et sont notés respectivement A, B, C, et D.



Pour simplifier la situation, on va supposer que la première bande touchée sera la bande horizontale supérieure, correspondant donc au segment $[BA]$. De plus, on ne visera que la partie droite de cette bande, c'est-à-dire l'ensemble des points de coordonnées de la forme $(x; \frac{1}{2})$, avec $0 \leq x \leq 1$. Un tel x s'appellera visée : il s'agit donc de l'abscisse du premier rebond de la boule sur cette bande $[BA]$.

On dira que la boule est empochée en A, ou atteint A en *n* bandes, avec $n \geq 1$, lorsqu'elle finit par rentrer dans le trou A après *n* rebonds. On assimilera la boule et les trous à des points : la boule doit précisément se trouver à la position d'un trou pour être empochée. On supposera de plus que la boule continue sa course indéfiniment tant qu'elle ne rencontre pas de trou !

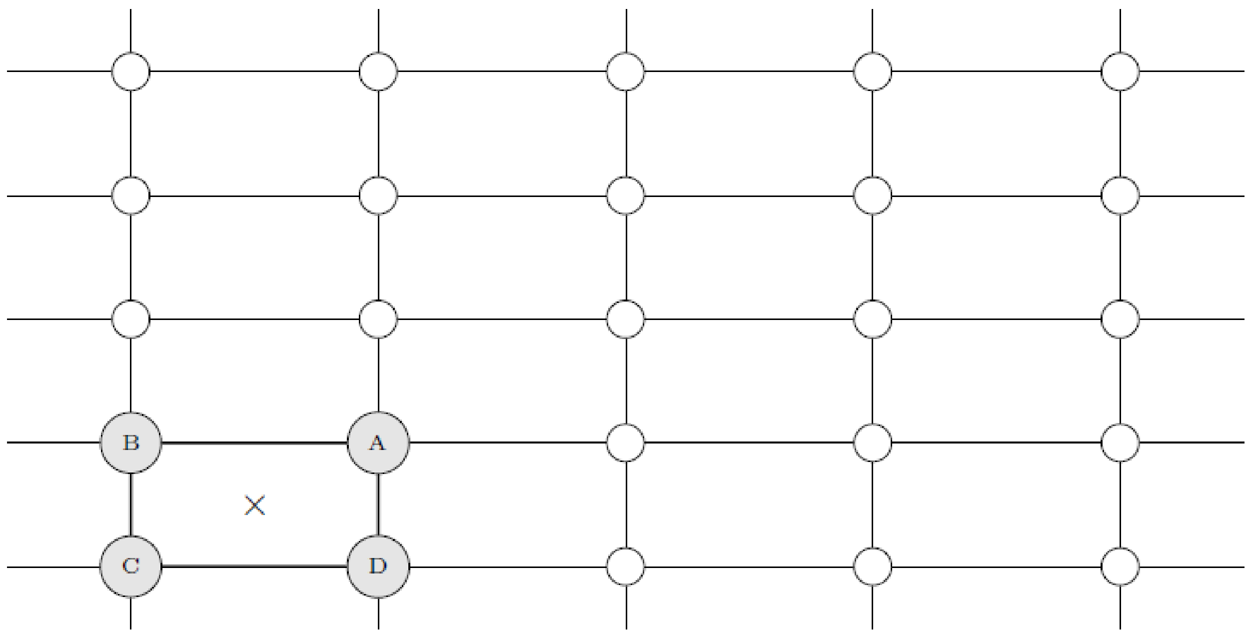
<u>Quelques cas simples</u>

1. On choisit la visée $x = \frac{1}{2}$. La boule va-t-elle être empochée ? Si oui, en combien de bandes ?
   Une figure précise pourra servir de justification.
2. Même question avec $x = \frac{1}{3}$
3. Déterminer une valeur x permettant d'empocher la boule en 2 bandes.
4. Proposer une formule pour x permettant d'empocher la boule en n bandes, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Préciser le trou, suivant la valeur de *n*, et illustrer cette proposition avec une figure, dans les cas *n* = 3 et *n* = 4.

<u>Utilisation des trous "virtuels"</u>

Il est possible d'établir une démonstration de la formule proposée à la question précédente, et, plus généralement, trouver l'ensemble des valeurs de visée $x \in [0\,;\,1]$ permettant d'empocher la boule en *n* bandes. Une jolie façon d'y parvenir est de considérer des trous "virtuels", images des trous du billard par des symétries axiales par rapports aux bandes.
On se contentera ici d'appliquer cette méthode à quelques cas particuliers.

5. On considère l'image D' du trou D par la symétrie orthogonale d'axe la bande horizontale supérieure. Expliquer pourquoi viser le trou virtuel D' permet d'atteindre D en une bande.
6. Suivant le même raisonnement, déterminer un trou "virtuel" A', image du trou A par une certaine symétrie, à préciser, permettant d'atteindre A en deux bandes, et expliquer comment on retrouve la valeur de x obtenue à la question 3.
7. Reproduire succinctement la figure suivante en indiquant à la place de chaque petit cercle laissé vide la lettre A, B, C, ou D précisant le trou virtuel qu'il représente.

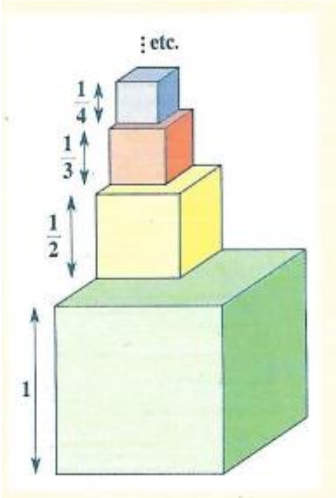


8. A l'aide du schéma précédent, déterminer la visée x (toujours sur la partie droite de la bande supérieure) permettant d'atteindre D en 5 bandes, et en touchant au moins une fois chacune des 4 bandes.

Exercice académique numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Une histoire de cubes

Le problème



Un artiste contemporain désire matérialiser sa vision originale de l'infini par une œuvre spatiale ainsi conçue :

- Le moulage de cubes pleins, en matière plastique, d'arêtes successives (en mètre) :
$$1\,, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \;;$$
- le revêtement de la surface de tous les cubes construits par une couche de laque ;
- l'empilement de tous ces cubes, par tailles décroissantes, dans une salle de musée.

L'artiste dispose d'un volume total de 2 m^3 de plastique (malléable à volonté) et d'une quantité de laque permettant de peindre une surface de 12 m^2 . D'autre part, la salle de musée à une hauteur de plafond de 8 mètres.

Il s'agit de déterminer si, avec ces contraintes, l'artiste pourra :

- mouler autant de cubes qu'il veut (*problème 1*)
- en peindre autant qu'il veut (*problème 2*)
- en empiler autant qu'il veut (*problème 3*)

<u>Préliminaires</u>

On note v_n, le volume total (en m^3) des n premiers cubes construits (ceux d'arêtes $1\,, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$), s_n la somme de leurs aires (en m^2) et h_n, la hauteur (en m) de leur empilement.

1. Montrer que résoudre les trois problèmes se ramène à répondre aux trois questions :

A-t-on, pour tout entier n ≥ 1, $v_n \leq 2$?

A-t-on, pour tout entier n ≥ 1, $s_n \leq 12$?

A-t-on, pour tout entier n ≥ 1, $h_n \leq 8$?

2. Vérifier que l'artiste peut réaliser une œuvre comprenant 10 cubes.

3. L'artiste peut-il réaliser une œuvre comprenant 100 cubes ?

<u>Résolution des problèmes</u>

4. ***Résolution du problème 2***

a) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$:
$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

b) En déduire que :
$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 1 - \frac{1}{n} \leq 1$$

c) Résoudre alors le *problème 2.*

5. ***Résolution du problème 1***

a) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$:
$$\frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^2}$$

b) En déduire que :
$$v_n \leq \frac{1}{6} s_n$$

c) Résoudre alors le *problème 1.*

6. ***Résolution du problème 3***

a) Vérifier les inégalités :

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\geq\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\geq\frac{1}{2}$$

et plus généralement, pour tout $k \geq 1$:

$$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}\geq\frac{1}{2}$$

b) En déduire que,

$$\text{si} \quad n=2^k \quad \text{alors} \quad h_n\geq\frac{3}{2}+\frac{k-1}{2}$$

c) Résoudre alors complètement le *problème 3*.

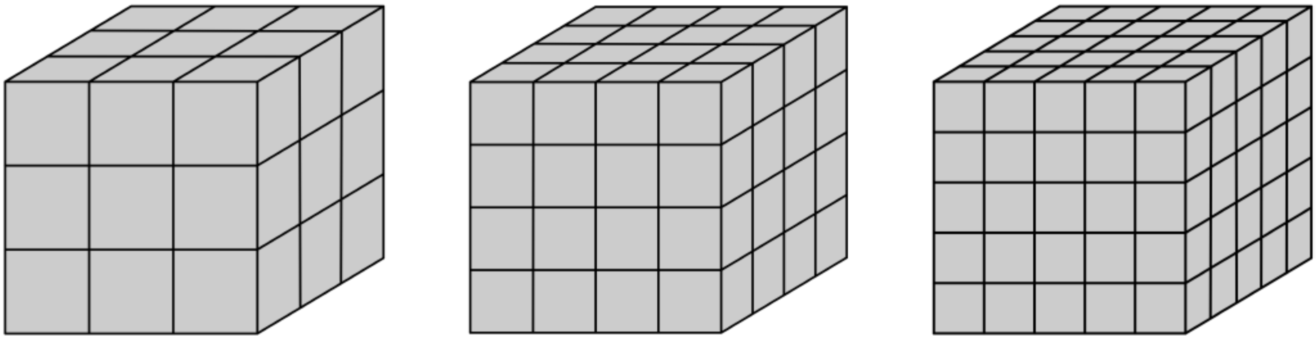
Exercice académique numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que S)

Un gros cube … des petits cubes !

Présentation du problème et notations

On considère des cubes composés d'une matière blanche facile à découper. On peint les faces des cubes en gris et on laisse sécher. L'expérience consiste ensuite à découper les cubes en n^3 petits cubes de même taille avec n un entier naturel donné supérieur ou égal à 2.

Par exemple, pour $n = 3$, $n = 4$ et $n = 5$ on obtient les résultats suivants :



On peut donc avoir des petits cubes de 4 sortes différentes :

- Des cubes n'ayant aucune face peinte en gris. On note a_n le nombre de ces cubes.
- Des cubes ayant une seule face peinte en gris. On note b_n le nombre de ces cubes.
- Des cubes ayant exactement deux faces peintes en gris. On note c_n le nombre de ces cubes.
- Des cubes ayant exactement trois faces peintes en gris. On note d_n le nombre de ces cubes.

1. Combien de faces, d'arêtes et de sommets possède un cube ?

2. Compléter le tableau suivant (après l'avoir reproduit sur votre feuille) :

	a_n	b_n	c_n	d_n	$a_n + b_n + c_n + d_n$
$n = 2$					
$n = 3$					
$n = 4$					
$n = 5$					

3. En vous inspirant de la question précédente, déterminer les expressions de a_n , b_n , c_n et d_n en fonction de n pour n quelconque.

4. Vérifier que : $a_n + b_n + c_n + d_n = n^3$.

5. En vous aidant de votre calculatrice, dites à partir de quelle valeur de n il y a plus de petits cubes n'ayant aucune face peinte en gris que de petits cubes ayant au moins une face peinte.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques 2019

Académies de la Guadeloupe, de la Guyane et de la Martinique

Mercredi 13 mars 2019 de 8 heures à 12 heures10

- Pause de 10h à 10h10

Seconde Partie : Exercices nationaux de 10h10 à 12h10

A distribuer à 10h10

La résolution est individuelle

Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant 12h10.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Deuxième partie : Exercices nationaux de 10h10 à 12h10

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Grands pairs…*) et 2 (*Des droites et des mots*), ceux des autres séries traitent les exercices numéros 1 (*Grands pairs…*) et 3 (*Additionnons des points*).

Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Grands pairs…

Dans ce problème, on ne considère que des nombres entiers naturels non nuls. Pour chacun de ces entiers, on numérote les chiffres de son écriture décimale de gauche à droite. Le premier chiffre de gauche ne peut être 0. Par exemple, pour le nombre 3 021, le chiffre 3 reçoit le numéro 1, le chiffre 0 le numéro 2, le chiffre 2 le numéro 3 et le chiffre 1 le numéro 4.

On nomme « grand pair » tout nombre dont chaque chiffre en position paire, s'il y en a, est au moins aussi grand que ses chiffres directement voisins (s'il en a). On nomme « grand impair » tout nombre dont chaque chiffre en position impaire est au moins aussi grand que ses chiffres directement voisins (s'il en a).
Par exemple :
- le nombre 3 021 est un grand impair, mais pas un grand pair ;
- les nombres 3, 2, 7 et 777 sont à la fois des grands pairs et des grands impairs ;
- le nombre 2 019 n'est ni un grand pair, ni un grand impair.

1. Le nombre 384 957 est-il un grand pair ? Un grand impair ?

2. Déterminer les nombres qui sont à la fois des grands pairs et des grands impairs.

3. Parmi les nombres s'écrivant avec deux chiffres, y a-t-il davantage de grands pairs ou de grands impairs ?

4. ***a.*** Le nombre 3 021 peut-il s'écrire comme la somme de deux grands impairs ayant le *même* nombre de chiffres ?

b. Le nombre 3 021 peut-il s'écrire comme la somme de deux grands pairs ayant le *même* nombre de chiffres ?

5. Prouver que tout nombre entier peut s'écrire comme la somme de deux grands impairs (rien n'est ici imposé quant au nombre de chiffres de ces deux grands impairs).

6. Démontrer que tout nombre grand impair strictement inférieur à 100 peut s'écrire comme la somme de deux grands pairs (sans contrainte quant au nombre de chiffres de ces grands pairs).

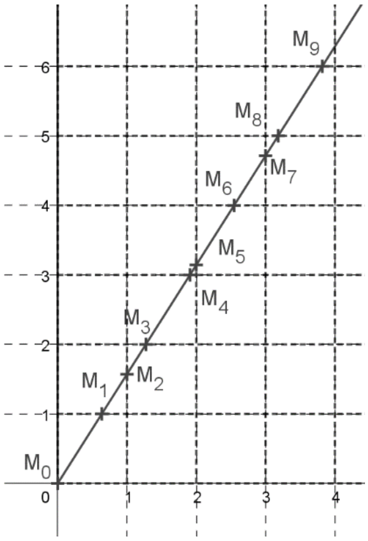
7. Déterminer le plus petit grand impair supérieur ou égal à 2 qui ne peut pas s'écrire comme la somme de deux grands pairs (sans contrainte quant au nombre de chiffres de ces grands pairs).

8. Compléter le pseudocode ci-dessous (ou s'en inspirer) pour rédiger un algorithme à retranscrire sur sa copie qui, partant d'un tableau « T » représentant un nombre « N » (par exemple 384 957) de « nb » chiffres (ici 6), renvoie « 1 » si N est un grand pair, et « 0 » sinon :

```
nb = 6                          ## commentaire : ici N = 384 957 est à 6 chiffres
T  = [3 ; 8 ; 4 ; 9 ; 5 ; 7]    ## commentaire : ici T[1] = 3, T[2] = 8, T[3]=4, … ,T[nb]=7
resultat = 1
i = 1
…
while ((resultat == 1) and i≤ nb) :
      … … …
      i = i+2
print(resultat)
```

Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Des droites et des mots



Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'origine O. Dans tout le problème, on s'intéresse aux demi-droites issues de O et contenues dans le premier quadrant (ensemble des points du plan dont l'abscisse et l'ordonnée sont positives). À tout entier naturel n, on associe la droite d'équation $x = n$ et la droite d'équation $y = n$. L'ensemble de ces droites constitue un « quadrillage ».

Toute demi-droite (d) issue de O et de pente strictement positive possède des points d'intersection notés $\mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \dots, \mathrm{M}_n, \dots$ avec les droites du quadrillage, les points étant numérotés dans l'ordre croissant de leurs abscisses. À chaque point M_i on associe la lettre H, la lettre V ou la lettre C selon qu'il est le point d'intersection de (d) avec une droite horizontale, une droite verticale ou les deux à la fois. On construit ainsi des « mots » de longueur infinie. Le mot correspondant à la figure ci-contre débute par : CHVHHVHVHH.

1. Représenter, dans un reprère orthonormé d'unité 1 cm, la demi-droite d'équation $y = 1{,}5x$ et donner les huit premières lettres du mot qu'on peut lui associer.
2. Pourquoi les mots associés aux demi-droites commencent-ils tous par la lettre C ?

Un mot est dit « périodique » si une séquence se répète indéfiniment à partir de la première lettre. On appelle « motif » la plus petite séquence qui sé répète indéfiniment et « période » le nombre de lettres du motif.
Par exemple, CVVCVVCVVCVV … est un mot périodique de période 3 dont le motif est CVV.

3. Déterminer et représenter la demi-droite qui donne naissance au mot périodique de période 3 de motif CVV.

4. ***a.*** Montrer que si on rencontre la séquence VV dans le mot associé à une demi-droite, alors la pente de cette demi-doite est strictement inférieure à 1.
b. Que peut-on dire de la pente d'une demi-droite si on rencontre la séquence HH dans le mot associé ?
c. Tous les mots associés à une demi-droite commencent par C. Tout mot commençant par C est-il associé à une demi-droite ?

5. On suppose dans cette question que le point M_6 est associé à la septième lettre d'un mot de période 6. Quelles sont les droites pouvant conduire à ce résultat ? Quels mots leur sont associés ?

6. Énoncer et prouver une condition nécessaire et suffisante portant sur la pente d'une demi-droite pour que le mot qui lui est associé soit périodique.

7. On donne un entier naturel p non nul. Est-il possible de trouver un mot périodique de période p ?

8. Soit W le mot correspondant à la demi-droite de pente $\sqrt{2}$. Pour tout entier naturel n, le point d'intersection de la demi-droite avec la droite d'équation $x = n$ a pour lettre associée V : pourquoi ? On appelle $F_W(n)$ le nombre de lettres H précédant V dans l'écriture de W. La suite de terme général $\frac{F_W(n)}{n}$ possède-t-elle une limite ?

Exercice national numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que S)

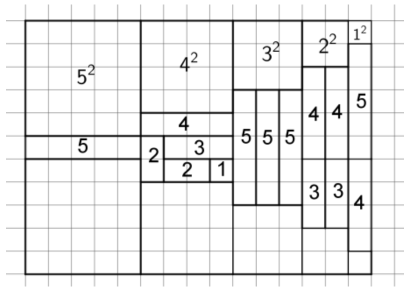
Additionnons des points

Somme de carrés

Un nombre entier n étant donné, on cherche dans cette partie à estimer

$$S(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$$

Sur la photo ci-contre, on a représenté une pyramide de boulets de pierre, à base carrée, avec 6 étages qui contiennent $6^2, 5^2$, ….,1 boulets.
Le nombre de boulets qui la composent est $S(6) = 91$.



1. Dans le cas $n = 5$, le puzzle présenté ci-contre permet d'estimer $S(5)$. Comment ? Quelle valeur obtient-on par cette méthode ?

2. Les exemples précédents inspirent la formule $S(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

a. Montrer que l'entier $n(n+1)(2n+1)$ est bien un multiple de 2 et de 3.

b. Si on suppose que pour un certain n, sur lequel on ne fait aucune autre hypothèse, $S(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, quelle formule obtient-on pour $S(n) + (n+1)^2$? On peut donc décider que la formule de $S(n)$ est vraie pour tout entier n.

3. Montrer que $S(24)$, somme des 24 premiers carrés, est un carré.

Addition sur une courbe

On considère l'ensemble (E) des points du plan dont les coordonnées (x, y) satisfont la relation

$$y^2 = \frac{1}{6}x(x+1)(2x+1)$$

4. Un peu d'exploration

a. Les points de coordonnées $(1, 1)$ et $(24, 70)$ appartiennent-ils à cet ensemble ? Fournir deux autres exemples.

b. Les points de coordonnées $(-2, 1)$ et $\left(-\frac{1}{4}, 3\right)$ appartiennent-ils à (E) ?

c. Quelles relations doit vérifier le réel x pour qu'il y ait un point d'abscisse x dans l'ensemble (E) ? Dans ce cas, combien y a-t-il de points d'abscisse x dans (E) ?

5. La forme de la courbe

a. Sur l'annexe qui servira aux tracés, on a représenté l'ensemble (E) qu'on appellera dorénavant courbe (E). On peut identifier des « branches infinies ».

Comment expliquer que le quotient $\frac{3y^2}{x^3}$ s'approche de 1 lorsque l'abscisse x du point de coordonnées (x, y) de la courbe devient très grande ? On a alors $y \approx \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{3}}$.

b. Expliquer pourquoi la courbe (E) présente une partie « fermée » ?

6. Somme de deux points

a. Sur la feuille annexe, à rendre avec la copie, on a représenté la courbe (E). Pour tout couple (A, B) de points distincts de la courbe (E), on trace la droite (AB). Quand elle recoupe la courbe en un troisième point D, on note $\mathrm{A}\oplus\mathrm{B}$ le symétrique de D par rapport à l'axe des abscisses. Représenter le point $\mathrm{A}\oplus\mathrm{B}$ sur la figure 1.

b. Pour tout point A de la courbe (E), on trace la tangente en A à la courbe (E). Quand elle recoupe la courbe (E) en un point D, on note $\mathrm{A}\oplus\mathrm{A}$ le symétrique de D par rapport à l'axe des abscisses. Représenter le point $\mathrm{A}\oplus\mathrm{A}$ sur la figure 2.

c. On note 2A $=$ $\mathrm{A}\oplus\mathrm{A}$, 3A$=$ $\mathrm{A}\oplus 2\mathrm{A}$, etc. Représenter le point 3A sur la figure 3.

7. Un système de codage

La correspondance entre Alice et Bruno est protégée par une clef : les quatre premières décimales de l'abscisse du point $ab\mathrm{M}$, obtenu de la manière suivante :

1. Ils choisissent ensemble un point M sur la courbe (E) ;
2. Alice choisit un entier a et ne donne à Bruno que les coordonnées du point $a\mathrm{M}$;
3. Bruno choisit un entier b et ne donne à Alice que les coordonnées du point $b\mathrm{M}$;

Dans ce processus, ils choisissent le point M de coordonnées (1, 1). Alice donne à Bruno les coordonnées (0,02083333, 0,06076389). Bruno donne à Alice les coordonnées (0,02908309, −0,07265188).

En s'aidant du tableau ci-dessous, indiquer quelle est la clef.

k	Abscisse du point $k\mathrm{M}$	Ordonnée du point $k\mathrm{M}$
1	1	1
2	0,02083333	0,06076389
3	5,63265731	−8,73904883
4	1,06401114	1,07001139
5	0,02908309	−0,07265188
6	3,93363878	5,35550512
7	0,651426	−0,64256859
8	0,00115486	0,01389763
9	107,8640	−651,271826
10	26,5927	81,40364156

Nom ou numéro d’anonymat du candidat : …..

À RENDRE AVEC LA COPIE

Annexe « Additionnons des points »

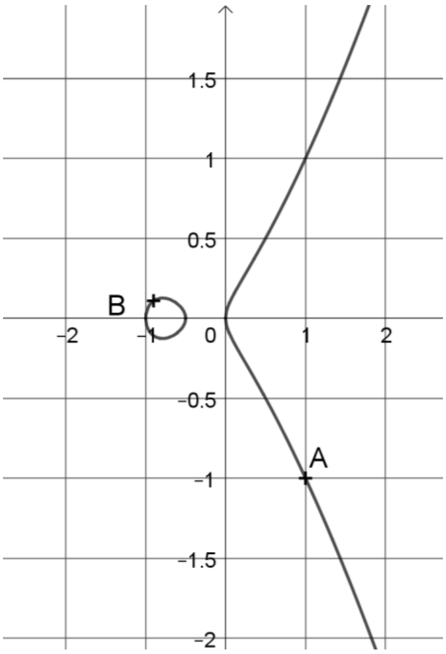


Figure 1

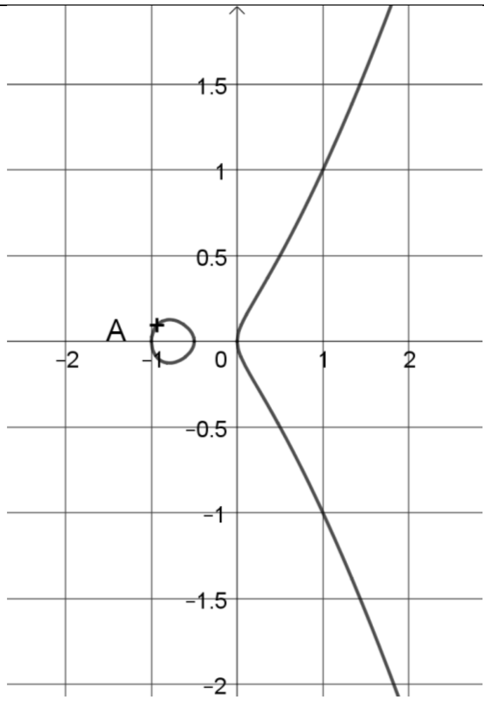


Figure 2

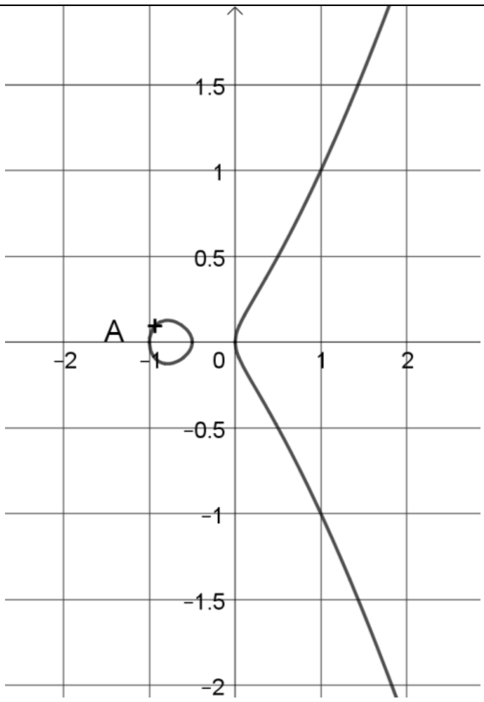


Figure 3