Olympiades académiques de mathématiques

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Académie de Guyane

Mercredi 16 mars de 8 heures à 12 heures 10

- Pause de 10 heures à 10 heures 10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices académiques »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices nationaux »). **Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant 12h10**.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Première Partie : 8 heures – 10 heures

Exercices académiques (8h-10h)

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Black dices : le black jack aux dés*) et 2 (*Simplifications scandaleuses*), les autres traitent les exercices numéros 1 (*Black dices : le black jack aux dés*) et 3 (*Les boites*).

Exercice académique numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Black dices : le black jack aux dés

Alice et Bob jouent au Black dices. Il s'agit d'une variante du Black Jack qui se joue en 2 tours avec 3 dés, et où, comme dans la version casino avec des cartes, l'on doit chercher à s'approcher d'un score de 21, sans toutefois le dépasser. On va étudier ici une version simplifiée à 2 dés, supposés bien sûr équilibrés, pour un score limite de 15.

Voici comment se déroule une partie :

1er tour : les joueurs lancent chacun les 2 dés et calculent le total obtenu.

2ème tour : suivant le résultat obtenu au premier tour, chacun des deux joueurs peut décider de s'arrêter (stratégie 0), ou bien de relancer un (stratégie 1) ou deux dés (stratégie 2), et d'ajouter le total obtenu à celui du premier tour.

L'objectif est d'avoir le plus grand score, sans toutefois dépasser 15.
En cas d'égalité, c'est le joueur qui a joué le premier qui est déclaré vainqueur.

Préliminaires

1. Au premier tour, on peut obtenir un total allant de 2 à 12. Donner la probabilité d'obtention de chacun de ces scores sous la forme d'un tableau.

Partie 1 : Stratégie pour Alice

Alice et Bob jouent une partie. A l'issue du premier tour, Alice a obtenu 8.

2. Bob joue son deuxième tour, et obtient un total de 12.
a) Quelle est la probabilité pour Alice de dépasser 15 si elle choisit la stratégie 2 (elle relance les deux dés) ?
b) Déterminer la stratégie qu'Alice doit choisir si elle veut optimiser ses chances de battre Bob, et donner la probabilité correspondante.

3. Même question que **2.b.** en supposant maintenant que Bob obtient 11 à son deuxième tour.

Partie 2 : Stratégie pour Bob

On suppose que Bob et Alice ont tous les deux obtenus 8 au premier tour. Bob doit jouer son deuxième tour, et on suppose qu'Alice jouera ensuite en tenant compte du résultat de Bob et en choisissant <u>la stratégie qui optimise ses chances de victoires</u>.

4. A l'aide de la question **2.**, donner la probabilité qu'a Bob de gagner s'il obtient un score de 4 au deuxième tour (et donc un total de 12). On expliquera le calcul effectué.

5. De même, à l'aide de la question **3.**, donner la probabilité qu'a Bob de gagner s'il obtient un score de 3 au deuxième tour. On expliquera le choix d'Alice et le calcul effectué.

6. Sans plus d'explication, remplir un tableau donnant les probabilités de victoire pour Bob suivant chacun des scores possibles qu'il peut obtenir au second tour.
7. Déterminer la stratégie que Bob doit choisir pour optimiser ses chances de victoire. On expliquera le calcul effectué.

Exercice académique numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Simplifications scandaleuses

Clovis Clou appelle l'élève Clapeyron, lui fait écrire la fraction $\frac{2666}{6665}$ et lui demande de la simplifier.

- Je peux enlever un 6 au numérateur et un autre au dénominateur, dit Clapeyron. Cela fait : $\frac{266}{665}$
- Bien, approuve Clovis. Mais tu peux faire mieux !
- C'est vrai, reconnaît Clapeyron, je peux encore simplifier deux fois par 6. Et il écrit : $\frac{2666}{6665} = \frac{266}{665} = \frac{2}{5}$
- Bravo ! dit Clovis. Je te mets 10 sur 10 !

Extrait du « JEUX de l'esprit et divertissements mathématiques » de Jean-Pierre ALEM.

Préambule

Bien qu'elle ait fourni à Clapeyron un résultat final juste, la méthode de simplification employée est évidemment tout à fait incorrecte. Néanmoins, il arrive parfois qu'elle donne un résultat juste. Dans ce cas, on dit que la fraction est simplifiable de manière scandaleuse.

1. Les fractions suivantes sont-elles simplifiables de manière scandaleuse : $\frac{199}{995}$, $\frac{2777}{7773}$?

Partie 1

<u>Notation</u> : Soit n un entier naturel, $n \geq 1$.

Si a, b, c sont des chiffres, on note $\overline{abb\ldots bb}$ le nombre formé du chiffre a suivi de n chiffres b.

De même, on note $\overline{bb\ldots bbc}$ le nombre formé de n chiffres b suivi du chiffre c.

L'objectif est de trouver une condition nécessaire sur les chiffres *a, b, c,* pour qu'une fraction du type $\frac{\overline{abb\ldots bb}}{\overline{bb\ldots bbc}}$ (avec les chiffres *a* et *b* distincts) se simplifie de manière scandaleuse, c'est-à-dire que :

$$\frac{\overline{abb\ldots bb}}{\overline{bb\ldots bbc}} = \frac{a}{c}$$

On rappelle la formule pour tout q ≠ 1 : $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

2. Le nombre 2345 se décompose sous la forme : $2345 = 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 1$.

De la même façon, le nombre $\overline{abb\ldots bb}$ qui contient n chiffres b se décompose sous la forme :

$$a \times 10^n + b \times 10^{n-1} + b \times 10^{n-2} + \cdots + b \times 10^1 + b \times 1$$

Ecrire de même la décomposition du nombre $\overline{bb\ldots bbc}$ qui contient n chiffres b.

3. Montrer que :

$$a \times 10^n + b \times (10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10^1 + 1) = a \times 10^n + b \times \frac{10^n - 1}{9}$$

4. Exprimer de même : $b \times 10 \times (10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10^1 + 1) + c$

5. Montrer que si l'égalité $\frac{\overline{abb\ldots bb}}{\overline{bb\ldots bbc}} = \frac{a}{c}$ est vraie, alors les chiffres *a, b* et *c* vérifient l'égalité : $b = \frac{9ac}{10a-c}$.

Partie 2 : Une application

6. Trouver une fraction simplifiable de manière scandaleuse égale à $\frac{1}{2}$. Donner tous les triplets (*a, b, c*) possibles.

7. Existe-t-il une fraction simplifiable de manière scandaleuse égale à $\frac{2}{3}$?

Exercice académique numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que S)

Les boîtes

Dans un centre d'achat par correspondance, les employés s'amusent à prendre du tapis plusieurs boîtes qui se suivent, puis à les replacer après les avoir rangées dans l'ordre inverse.

Le but de l'exercice est d'examiner si en manœuvrant les boîtes de cette façon, éventuellement plusieurs fois, il est possible de les trier pour les mettre dans un ordre fixé à l'avance.

Exemple : Cinq boîtes se présentent sur le tapis dans l'ordre suivant :

a	c	e	d	b

Il est possible, avec deux manœuvres successives, de trier ces cinq boîtes pour les mettre dans l'ordre « a-b-c-d-e ».

Justification :

① En manœuvrant sur les 3 dernières boîtes, on obtient :

a	c	b	d	e

② En manœuvrant ensuite sur les boîtes désormais en seconde et troisième position, on obtient :

a	b	c	d	e

1. Montrer qu'il est possible de trier les quatre boîtes données ci-dessous pour les mettre dans l'ordre « a-b-c-d ».

c	a	d	b

2. Trois boîtes ne sont pas dans l'ordre « a-b-c »

a. Est-il toujours possible de les trier pour les mettre dans l'ordre « a-b-c » en une seule manœuvre ?

b. Est-il toujours possible de les trier pour les mettre dans l'ordre « a-b-c » en au plus deux manœuvres ?

Vous justifierez vos réponses.

3. Est-il toujours possible de trier 4 boîtes ?

Liberté • Égalité • Fraternité RÉPUBLIQUE FRANÇAISE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE	**Olympiades académiques de mathématiques**	académie Guyane MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE Liberté • Égalité • Fraternité RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Académie de Guyane

Mercredi 16 mars de 8 heures à 12 heures 10

- Pause de 10 heures à 10 heures 10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices académiques »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices nationaux »). **Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant 12h10**.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Deuxième Partie : 10 heures 10 – 12 heures 10

Texas Instruments · Animath · Gymaths · CASIO · Crédit Mutuel Enseignant · Inria

Exercices nationaux (10h10-12h10)

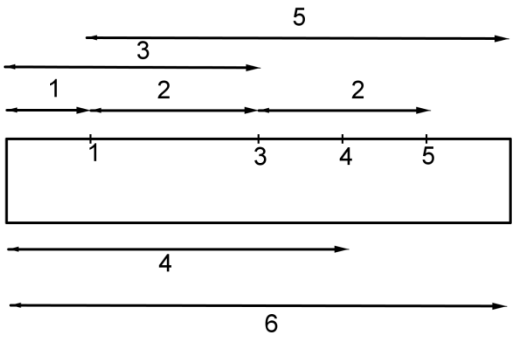
A distribuer à 10h10

Les candidats traitent deux exercices. Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (Tout passe, tout s'efface) et 2 (Sommes de puissances entières d'entiers), les autres traitent les exercices numéros 1 (Tout passe, tout s'efface) et 3 (Dés collés).

Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Tout passe, tout s'efface

On dispose d'une règle graduée en cm dont la longueur, supérieure à 4 cm, est un nombre entier n de centimètres.
La figure ci-contre représente une règle de longueur 6 dont la graduation 2 a été effacée. Elle permet cependant de mesurer toutes les longueurs entières inférieures ou égales à 6. La longueur 2 est, par exemple, obtenue avec les graduations 1 et 3 ou avec les graduations 3 et 5.
On dit alors que la liste (1, 3, 4, 5) est *opérationnelle.*
Plus généralement, on dira qu'une liste d'entiers compris entre 1 et $n-1$ est *opérationnelle* pour une règle de longueur n si les écarts entre les extrémités de la règle ou les graduations marquées permettent de retrouver tous les entiers compris entre 1 et n.



1. On suppose que la longueur de la règle est égale à 6 cm.
a. Le triplet (2, 3, 4) est-il opérationnel ?
b. Le couple (1, 4) est-il opérationnel ?

2. Démontrer que pour une règle de 9 cm de longueur, il existe un triplet qui est opérationnel.

3. ***a.*** Combien d'écarts au maximum peut-on constituer à partir de p graduations et des extrémités d'une règle ?
b. Démontrer, pour une règle de 11 cm, qu'il n'existe pas de triplet qui soit opérationnel.
4. On suppose que la règle a une longueur de 10 cm. On considère une liste de graduations opérationnelle dont $a \geq 1$ est le plus petit élément et $b \leq 9$ le plus grand.
a. Montrer que $a = 1$ ou $b = 9$.
b. On suppose que $a = 1$. Si la liste opérationnelle ne comporte que 3 entiers, montrer que $b = 8$.
c. En déduire qu'il n'existe pas de liste opérationnelle à trois termes.
d. Trouver une liste opérationnelle à quatre termes.

5. Déterminer une liste de longueur minimale qui soit opérationnelle avec une règle de 23 cm de longueur.

Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Sommes de puissances entières d'entiers

Partie 1 : sommes, sommes de carrés, sommes de cubes

Les ensembles $A = \{1, 9, 11\}$ et $B = \{3, 5, 13\}$ possèdent des propriétés qui attisent la curiosité. On remarque en effet que $1 + 9 + 11 = 3 + 5 + 13$ et que $1^2 + 9^2 + 11^2 = 3^2 + 5^2 + 13^2$.
Dans la suite, on dira que la paire d'ensembles d'entiers $\{A, B\}$ possède la propriété S_1 si les deux ensembles ont le même nombre d'éléments et si la somme des éléments de A est égale à la somme des éléments de B. On dira qu'elle possède la propriété S_2 si elle possède la propriété S_1 et si de plus la somme des carrés des éléments de A est égale à la somme des carrés des éléments de B. On dira qu'elle possède la propriété S_3 si de plus la somme des cubes des éléments de A est égale à la somme des cubes des éléments de B.

Étant donné un entier impair n, on se demande s'il est possible de partager l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$ en deux parties A et B telles que $\{A, B\}$ possède une des propriétés évoquées ci-dessus. Par convention, A sera la partie qui contient 0.

1. Dans le cas $n = 3$, peut-on trouver $\{A, B\}$ possédant la propriété S_1 ?

2. Même question dans le cas $n = 5$.

3. ***a.*** Si l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ peut être partagé en deux parties A et B telles que les propriétés S_1 et S_2 soient satisfaites, quelle est la somme des éléments de A ?
b. Quelle est la somme des carrés des éléments de A ?
c. Déterminer des parties A et B solutions du problème.

4. Lorsque l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$ peut être partagé de sorte à satisfaire une ou plusieurs des propriétés S_i, on adopte le système de représentation suivant : chaque case de la seconde ligne des tableaux ci-dessous contient 1 si le nombre appartient à A, 0 si le nombre appartient à B.
a. Compléter les deux tableaux :

$n = 3$	0	1	2	3
	1			

$n = 7$	0	1	2	3	4	5	6	7
	1							

b. L'observation de ces deux tableaux fait naître l'idée qu'en dédoublant chaque 0 en 01 et chaque 1 en 10, on transforme une séquence intéressante en une autre, dont la taille est doublée. Compléter le tableau correspondant à $n = 15$ et vérifier que les parties obtenues possèdent bien la propriété S_3.

Partie 2 : naissance d'une suite
Inspirés par les questions précédentes, on étudie la suite définie par $t_0 = 1$ et la relation de récurrence : pour tout entier n, $t_{2n} = t_n$ et $t_{2n+1} = 1 - t_n$ (suite de Prouhet-Thue-Morse).

5. Calculer $t_{2\,016}$.

6. Écrire un algorithme permettant, un entier n étant donné, d'obtenir la valeur de t_n.

7. La suite (t_n) possède-t-elle trois termes consécutifs identiques ?

8. Cette suite est-elle périodique ?

Exercice national numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

Dés collés

On rappelle que sur un dé à jouer la somme des nombres inscrits sur deux faces opposées est égale à 7. Cette condition est réalisée dans ce problème.

1. ***a.*** On aligne deux dés en collant deux faces représentant le même nombre. On convient que toutes les faces non collées sont accessibles à la vue, quitte à tourner l'ensemble.

Quelles sont les valeurs possibles de la somme S_2 des nombres apparaissant sur toutes les faces visibles (non collées entre elles) ?

b. On aligne trois dés de la même façon : en collant l'une contre l'autre des faces portant le même nombre.

Montrer que la somme S_3 des nombres apparaissant sur toutes les faces visibles (non collées entre elles) ne dépend pas des nombres cachés.

2. Maintenant on aligne k dés, de la gauche vers la droite, toujours en collant deux faces représentant le même nombre, l'une contre l'autre. Soit n le premier nombre caché en commençant par la gauche.

a. Exprimer la somme des faces visibles des k dés, notée S_k, en fonction de n et de k. (*On pourra distinguer deux cas en fonction de la parité de* k).

b. Peut-on avoir $S_k = 2\,016$ pour un k bien choisi ?

c. Quelle est la prochaine année A pour laquelle on pourra avoir $S_k = A$ pour un k bien choisi ?