Topologie de $\mathbb{R}$. L'espaces fonctionnels $\mathscr{C}([a,b],\mathrm{A})$

Dans toute la suite A et B sont des sous ensembles de $\mathbb{R}$.
$\mathrm{A}+\mathrm{B}=\{x+y, x\in \mathrm{A}, y\in \mathrm{B}\}$.
$\mathscr{C}([a,b],\mathrm{A})$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur [a,b] à valeurs dans A
$\mathscr{C}([a,b])$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur [a,b] à valeurs dans $\mathbb{R}$
Si E et F sont deux espaces vectoriels, $f\in\mathscr{L}(E,F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans F. $\mathscr{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphisme de E
$\mathring{\mathrm{A}}$ désigne l'intérieur de A et $\overline{\mathrm{A}}$ l'adhérence de A.
Ce sont respectivement le plus grand ouvert contenu dans A et le plus petit fermé contenant A. (L'existence de ces deux ensemble est un petit exercice facile).
$\mathbb{R}$ sera munit de sa topologie habituelle. (On peut munir $\mathbb{R}$ de topologie un peu plus exotique, ce sera utile pour des contres exemples...)
$\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{R}$
On utilisera l'abréviation *evn* pour espace vectoriel normé. Si $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, on pose :

1. $\|x\|_\infty=\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$
2. $\|x\|_1=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$
3. $\|x\|_2=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^2}$
4. pour $p\geqslant 1$, $\|x\|_p=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Compacité

On se place dans le cadre d'un espace métrique (E,d)

Définition-Borel-Lebesgue

Un sous ensemble A de E est compact si et seulement de tout recouvrement de A par des ouverts on peut en extraire un recouvrement fini.

Les propriétés suivantes sont équivalentes

1. A est compact
2. De toute famille de fermés d'intersection vide, on peut en extraire une sous famille finie d'intersection vide
3. De toute suite d'élément de E, on peut en extraire une sous suite convergente

Propriétés

1. Un compact est fermé et borné
2. Si E est un <u>*evn* de dimension fini</u>, les fermés bornés sont compacts

3. Soit f continue de (E, d) dans (E', d') alors l'image de tout compact de E est un compact de E'.
4. Corollaire : Soit f de (E, d) dans (E', d'), Soit A un compact non vide. Alors f est bornée sur A et atteint ses bornes sup et inf
5. Tout fonction continue sur un compact est uniformément continue.

Mots clés :
— Ouverts/fermés
— Borne sup, borne inf
— Compact(en particulier connaître et utiliser l'équivalence Borel-Lebesgue/Bolzano-Weierstrass dans un espace métrisable)
— Connexe
— Continuité (Différentes versions)
— Densité
— Espace Complet, espace de Banach

On rappelle le théorème de Weierstrass sur l'approximation de fonctions continues :
$\mathscr{P}$ est dense dans $(\mathscr{C}([a, b], \mathrm{A}), \|.\|_\infty)$.

Liste des leçons pouvant être intégré à ce cours (Topologie et Calcul différentiel des fonctions de plusieurs variables) : 204-206-212-216-228-241-263-265-266

Liste d'exercices pouvant être intégré à ce cours :414-415-431-452

Ces listes ne sont pas exhaustives.

L'objet de ce TD est de travailler la notion de convergence sous plusieurs formes. On reverra dans un premier temps la topologie de $\mathbb{R}$. Les deux premiers exercices sont des exercices d'échauffement.

Exercice 1. *Citer plusieurs propriétés qui caractérisent $\mathbb{R}$ par rapport à $\mathbb{Q}$*

Exercice 2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réel qui converge vers un réel ℓ, démontrer les résultats suivant :*

1. *Si u converge, elle est bornée*
2. *Si u est croissante majorée, elle converge*
3. *On suppose que u est majorée par M et que u converge vers ℓ, alors $\ell \leqslant M$*
4. *Si u est strictement croissante et converge vers ℓ, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < \ell$*
5. *Une suite d'entier qui converge est constante à partir d'un certain rang*

Exercice 3. *Équation fonctionnelle de Cauchy : L'objectif est de déterminer les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ qui vérifient la condition L :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$$

1. *Déterminer toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant L*
2. *Donner un exemple de fonction non continue sur $\mathbb{R}$ et vérifiant L*
   (Nb : On pourra remarquer que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}-$espace vectoriel et utiliser une de ses bases).

Exercice 4 (Sous groupes de $(\mathbb{R}, +)$)**.** *On veut montrer que si G un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$ alors il est soit discret (de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}$) soit dense dans $\mathbb{R}$.*
On considère $P = \{x \in G, x > 0\}$.

1. *que peut-on dire si* $P = \emptyset$ *?*
2. *On suppose que* $\inf P > 0$*, on pose alors* $\alpha = \inf P$*, montrer que* $\alpha \in G$ *et* $G = \alpha\mathbb{Z}$
3. *On suppose que* $\inf P = 0$*, Montrer que* G *est dense dans* $\mathbb{R}$

Exercice 5. *On pose* $H = \{\cos n, n \in \mathbb{N}\}$*,* $f(x) = \cos x$ *et* $G = \{n + 2m\pi, (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$ *on veut montrer que* H *est dense dans* $[-1, 1]$*.*

1. *Montrer que si* g *est une fonction continue sur* B*, et si* A *est dense dans* B*, alors* $g(\mathrm{A})$ *est dense dans* $g(\mathrm{B})$
2. *Montrer que* G *est un sous groupe de* $\mathbb{R}$ *et qu'il n'est pas discret*
3. *Conclure*

Exercice 6. *Vrai ou faux ? :*

1. *Si* A *et* B *sont ouverts, alors* $\mathrm{A} + B$ *est ouvert*
2. *Si* A *et* B *sont fermés, alors* $\mathrm{A} + B$ *est fermé*
3. *Si* A *et* B *sont compacts, alors* $\mathrm{A} + B$ *est compact*
4. *Si* A *est fermé et* B *compact, alors* $\mathrm{A} + B$ *est fermé*

Exercice 7 (Uniforme continuité et théorème de Heine)**.** *On dit qu'une fonction* f *est uniformément continue sur* A *si la condition suivante est réalisée :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, x') \in \mathrm{A}^2, |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

L'uniforme continuité entraîne évidemment la continuité simple.

1. *Montrer la fonction carré n'est pas uniformément continue sur* $\mathbb{R}$ *et la fonction racine carré est uniformément continue sur* $\mathbb{R}^+$
2. *Montrer que si* A *est compact, alors la continuité simple entraîne l'uniforme continuité.*
3. *Soit* f *une fonction uniformément continue sur un intervalle ouvert* $]a, b[$*, démontrer que la fonction* f *admet une limite en* a *et en* b
4. *Soit* f *continue sur* $[a, b]$*, soit* $\varepsilon > 0$*, montrer qui'l existe deux fonctions en escalier définie sur* $[a, b]$ *(Ie constante par morceaux)* e_1 *et* e_2 *qui vérifient :*
   (a) $e_1 \leqslant f \leqslant e_2$
   (b) $\displaystyle\int_a^b (e_2 - e_1)(x)dx \in [0, \varepsilon]$

Exercice 8. *Vrai ou faux ?*

1. $\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$
2. $\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}$
3. $\overbrace{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}}^{\circ} = \mathring{\mathrm{A}} \cap \mathring{\mathrm{B}}$
4. $\overbrace{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}^{\circ} = \mathring{\mathrm{A}} \cup \mathring{\mathrm{B}}$
5. $\complement\overline{\mathrm{A}} = \overline{\complement\mathrm{A}}$
6. $\complement\mathring{\mathrm{A}} = \overline{\complement\mathrm{A}}$

Exercice 9. *Démontrer que tout ouvert de* $\mathbb{R}$ *est réunion dénombrable d'intervalles ouverts*

Exercice 10 (d'autres façon de converger)**.** *Soit* u *une suite définie sur* $\mathbb{N}^*$*, pour* $n > 0$*, on pose* $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i$ *Si la suite* v *converge, on dit que* u *converge au sens de Cesàro*

1. *Montrer que si u converge au sens usuel vers ℓ, alors elle converge au sens de Cesàro vers ℓ*
2. *Étudier la réciproque*
3. *On dit qu'une fonction f est continue en x_0 au sens de Cesàro si pour toute suite u convergeant vers x_0 au sens de Cesàro, $f(u_n)$ converge vers $f(x_0)$ au sens de Cesàro. On dit que f est C-continue*
   (a) *Démontrer alors que les fonctions affines sont C-continues sur $\mathbb{R}$*
   (b) *Démontrer alors que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas C-continue sur $\mathbb{R}$*
   (c) *Démontrer qu'une fonction C-continue est continue (on pourra se contenter de la continuité en 0, avec une fonction f qui vérifie $f(0) = 0$, on revient au cas général à l'aide changement de variables affine).*
   (d) *Démontrer que seules les fonctions affines sont continues au sens de Cesàro*

Exercice 11. *n désigne un entier naturel strictement positif. Si $f \in \mathscr{C}[0,1]$, on notera $\int_0^1 f$ l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$.*
on pose $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$, $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2}$

1. *Montrer que pour tout élément f et tout élément g de $\mathscr{C}[0,1]$, $\int_0^1 |fg| \leqslant \|f\|_2\|g\|_2$.*
2. *Montrer que $\|.\|_1$, $\|.\|_\infty$, $\|.\|_2$ sont des normes sur $\mathscr{C}[0,1]$.*
3. *Démontrer que $\forall x \in \mathscr{C}[0,1], \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_\infty$*
4. *Soit f_n la suite d'éléments de $\mathscr{C}[0,1]$ définie par $f_n(x) = x^n$*
   (a) *Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|f_n\|_\infty$*
   (b) *Montrer que f_n est une suite convergente dans $(\mathscr{C}([0,1]), \|.\|_1)$ et de $(\mathscr{C}([0,1]), \|.\|_2)$, mais ne converge pas dans $(\mathscr{C}[0,1], \|.\|_\infty)$. Pour le second point, attention au raisonnement, on pourra par exemple calculer $\|f_n - f_{2n}\|_\infty$*
   (c) *$\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ sont-elles des normes équivalentes ?*
5. *$\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont-elles des normes équivalentes ?*
6. *Démontrer que $(\mathscr{C}[0,1], \|x\|_\infty)$ est un espace de Banach*
7. *Démontrer que la boule unité de $(\mathscr{C}[0,1], \|x\|_\infty)$ n'est pas compact (Sans utiliser le théorème de Riesz !!!)*
8. *$(\mathscr{C}[0,1], \|x\|_1)$ est-il un espace de Banach ?*
9. *On appelle δ_0 l'application définie sur $\mathscr{C}[0,1]$ par $\delta_0(f) = f(0)$*
   (a) *Vérifier que δ_0 est linéaire*
   (b) *δ_0 est-elle continue pour $\|.\|_\infty$?*
   (c) *δ_0 est-elle continue pour $\|.\|_1$.*

Exercice 12. *Démontrer que $\mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$ est séparable*

Exercice 13. *Soit f une fonction continue vérifiant pour tout Polynôme P,*

$$\int_0^1 f(x)P(x) = 0$$

Montrer alors que f est nulle

Exercice 14 ($\star\star$)**.** *On appelle $\mathscr{C}_C$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à support compact. On définit sur $\mathscr{C}_C$ l'application $\mathscr{F}$ par*

$$\mathscr{F}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{itx}dt$$

1. $\mathscr{F}$ est-elle à valeurs dans $\mathscr{C}_C$? Si ce n'est pas le cas, déterminer un espace fonctionnel dans lequel $\mathscr{F}$ prend ses valeurs.
2. $\mathscr{F}$ est-elle injective ?

Exercice 15 ($\star\star$)**.** *Soit A un sous espace propre d'un espace vectoriel normé E. Montrer que $\mathring{A} = \emptyset$. Montrer que A peut être dense dans E.*

Pour l'exercice suivant, vous pourrez utiliser le résultat suivant :

Si $\mathscr{A}$ est un anneau et $\mathscr{I}$ un de ses idéaux, alors :

$$\mathscr{I} \textit{ maximal} \iff \mathscr{A}/\mathscr{I} \textit{ est un corps}$$

Exercice 16 ($\star\star\star$)**.** *. Soit $\mathscr{I}$ un idéal maximal de $\mathscr{C}([0,1])$.*
On veut montrer qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $\mathscr{I} = \{f \in \mathscr{C}([0,1]), f(a) = 0\}$.

1. *On pose $\mathscr{I}_a = \{f \in \mathscr{C}([0,1]), f(a) = 0\}$. Montrer que $\mathscr{I}_a$ est maximal.*
2. *Soit $\mathscr{I}$ un idéal propre de $\mathscr{C}([0,1])$, montrer qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $\forall f \in \mathscr{I}, f(a) = 0\}$*
   On Pourra raisonner par l'absurde et s'intéresser à $\displaystyle\bigcup_{f\in\mathscr{C}([0,1])} f^{-1}(\mathbb{R}^*)$

Exercice 17. *Soit E un evn, démontrer l'équivalence :*

E est un espace de Banach $\iff$ toute série normalement convergente est convergente

Exercice 18. *Soit $f \in \mathscr{L}(R^p, R^q)$. Montrer que f est continue.*

Exercice 19. *Que peut-on dire (Sont-ils ouverts, fermés, compacts ?) des sous espace de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ suivants*

1. *$GL(n, \mathbb{R})$*
2. *$SL(n, \mathbb{R})$*

Exercice 20 ($\star\star$)**.** *Soient $(E, \|.\|)$ un Banach, $u \in \mathscr{L}(E, E)$ continue. Montrer que si $\|u\| < 1$ alors $Id - u$ est inversible.*
Indication : Généraliser $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ...$

Exercice 21 ($\star\star\star$)**.** *Soit* $\varphi \begin{cases} GL(n,\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \mapsto & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ u & \to & u^{-1} \end{cases}$ *Montrer que φ est continue*