académie Guyane

RÉGION ACADÉMIQUE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MODELE D'EVOLUTION

Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques

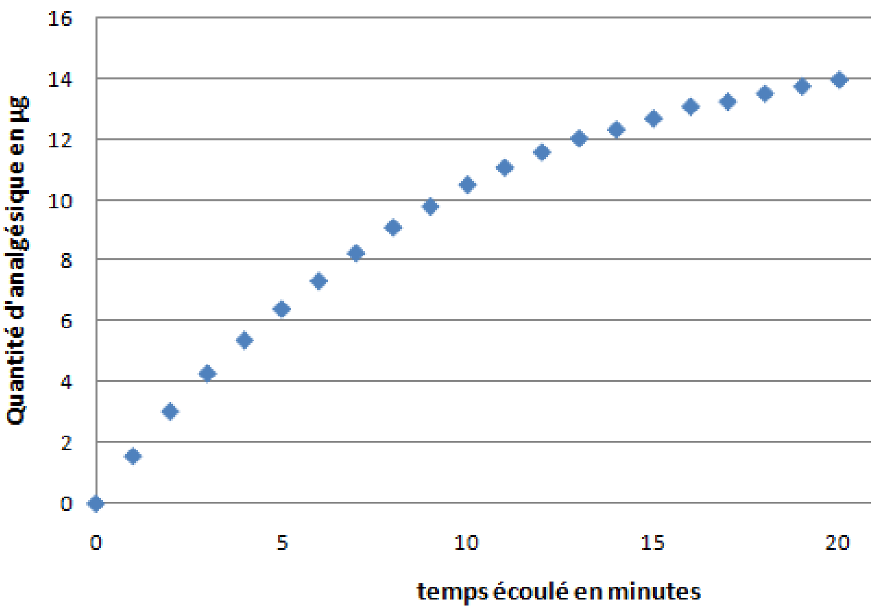
D'après : Suites, exponentielle, probabilités. Modéliser et représenter (spécialité de première)
https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/32/5/RA19_Lycee_G_1_MATH_Modeliser-Representer_1208325.pdf

Le jeu de couleur dans l'énoncé (noir, bleu, rouge) est explicité dans la partie commentaire.

Enoncé de l'activité - Dosage d'un analgésique

Au cours d'une anesthésie générale, afin de soulager la douleur du patient, l'anesthésiste décide d'administrer un analgésique au moyen d'une perfusion à débit continu. L'anesthésiste souhaite arrêter la perfusion lorsque la quantité de cet analgésique présente dans l'organisme du patient aura atteint le seuil de 15 µg.
Le nuage de points ci-dessous donne la quantité d'analgésique exprimée en µg présente dans l'organisme du patient en fonction du temps t écoulé exprimé en minutes.

Durée en min	Quantité en µg
0	0
1	1,568
2	3,01
3	4,293
4	5,392
5	6,421
6	7,347
7	8,264
8	9,113
9	9,801
10	10,525
11	11,089
12	11,596
13	12,052
14	12,34
15	12,706
16	13,1
17	13,265
18	13,53
19	13,769
20	13,984



Partie A : utilisation d'un modèle discret
On souhaite modéliser la situation à l'aide d'une suite. On note $q(n)$ la quantité d'analgésique en µg présente dans l'organisme du patient au bout de n minutes et on souhaite ainsi trouver une suite (un) telle que $un \approx q(n)$ pour n entier compris entre 0 et 20.

1. Expliquer pourquoi le choix d'une suite arithmétique ou géométrique n'est pas pertinent.

2. Montrer que la progression que suivent les nombres $16-q(0)$,$16-q(1)$,$16-q(2)$… est proche d'une progression géométrique.

3. Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$16 - q(n)$									
$q(n+1) - q(n)$									

Pourquoi est-il raisonnable de dire que la vitesse moyenne d'absorption de l'analgésique par l'organisme du patient entre l'instant $t_n = n$ min et l'instant $t_{n+1} = n+1$ min est proportionnelle à l'écart entre 16 et la quantité d'analgésique exprimée en µg présente dans l'organisme du patient à l'instant $t_n = n$ min.

4. Soit la suite (u_n) de premier terme $u_0=0$, telle que pour tout entier naturel n,
$u_{n+1} - u_n = 0{,}1(16-u_n)$ et donc que $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 1{,}6$.
Au regard des résultats de la question précédente, $u_n \approx q(n)$ pour tout entier naturel n.

- **a.** Démontrer que la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 16 - u_n$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
- **b.** Quelle est la limite de (v_n) quand n tend vers $+\infty$?
- **c.** En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
- **d.** Quelle est la plus petite valeur que la quantité d'analgésique en µg ne pourra jamais dépasser ?
- **e.** Ecrire un algorithme permettant de déterminer à la minute près l'instant auquel la perfusion devra être stoppée.

Partie B : utilisation d'un modèle continu

On note f la fonction qui à chaque instant t exprimé en minutes associe la quantité d'analgésique présente dans l'organisme du patient exprimée en µg à l'instant t.

1. À l'aide d'un tableur, construire le nuage de points représentant la différence entre 16 et la quantité d'analgésique exprimée en µg présente dans l'organisme du patient en fonction du temps t écoulé exprimé en minute, donnée dans le tableau de la partie A, pour t variant de 0 à 20.
Ensuite, ajouter une courbe de tendance linéaire, puis une courbe de tendance polynômiale de degré 2, et enfin une courbe de tendance exponentielle.
On notera g la fonction représentée par cette dernière courbe. Ainsi, g admet une expression algébrique de la forme $g : t \mapsto ke^{-at}$.
Après avoir constaté que la courbe de tendance exponentielle est celle qui semble le mieux modéliser la situation, donner la valeur de k arrondie à l'unité et une valeur arrondie au millième de a.
En déduire une expression algébrique de f.

2. Déterminer le sens de variation de f.

3. On considère le programme ci-contre :

Que va renvoyer le programme si on saisit dans la console duree(1/60)?

Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

```
from math import*

def f(x) :
    return 16*(1-exp(-0.105*x))


def duree(p) :
    a = 26
    b = 27
    while b-a > p :
        m =(a+b)/2
        if f(m) < 15 :
            a = m
        else :
            b = m
    return b
```

Eléments de correction : voir document ressource *Suites, exponentielle, probabilités. Modéliser et représenter (spécialité de première)*
https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/32/5/RA19_Lycee_G_1_MATH_Modeliser-Representer_1208325.pdf

Commentaires :
Codage couleur :

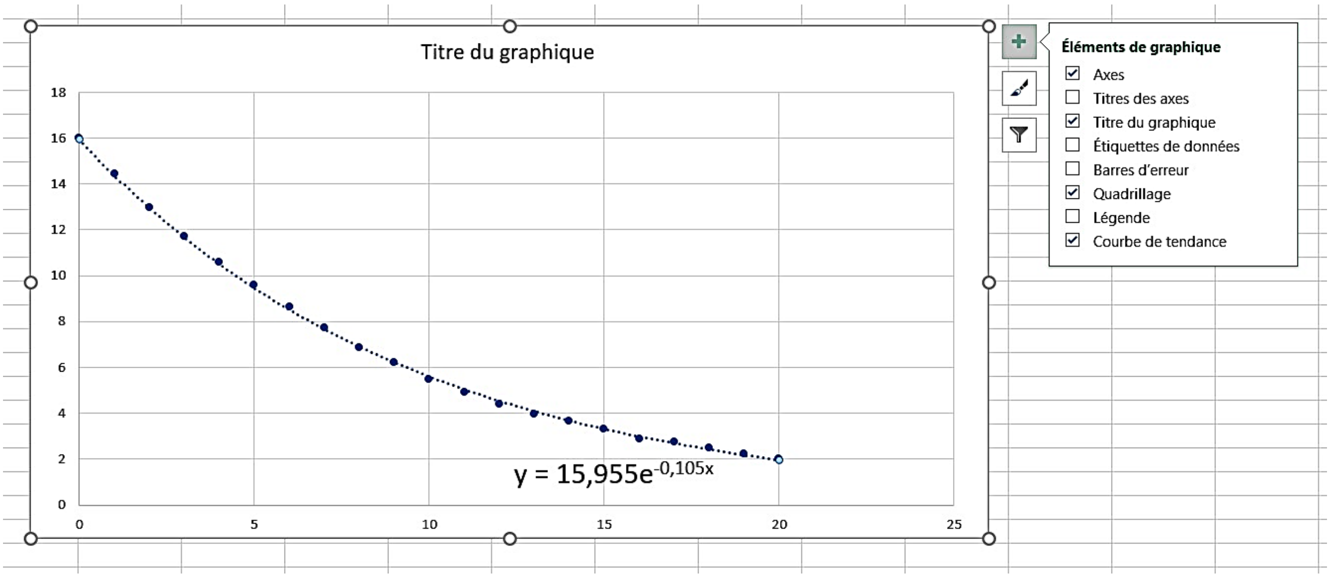
- En noir : éléments du programme de spécialités de première.
- En bleu : éléments de programme plus spécifiques à l'enseignement optionnel de mathématiques complémentaires (même si ces éléments ont pu être abordés en première).
- En rouge : éléments nécessitant une abstraction plus importante et un traitement pédagogique différencié.

Eléments du programme de spécialités de première.
L'outil logiciel est prépondérant. Modéliser, représenter sont les compétences essentielles.
Le traitement des premières questions A.1., 2. et 3. peut faire intervenir aussi bien :

- le registre graphique (invalidation de l'hypothèse d'une suite arithmétique) ;
- le registre algébrique (invalidation de l'hypothèse de la suite géométrique par le premier terme nul) ;
- le registre numérique (recherche d'éventuelles raisons au tableur question A.1., calcul des questions A.2. et A3.).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	durée en min	Q en µg	q arithm ?	q geom ?	16-q(n)	q geom	q(n+1)-q(n)	F/E
2	0	0			16		1,568	0,098
3	1	1,568	1,568	#DIV/0!	14,432	0,902	1,442	0,100
4	2	3,01	1,442	1,920	12,99	0,900	1,283	0,099
5	3	4,293	1,283	1,426	11,707	0,901	1,099	0,094
6	4	5,392	1,099	1,256	10,608	0,906	1,029	0,097
7	5	6,421	1,029	1,191	9,579	0,903	0,926	0,097
8	6	7,347	0,926	1,144	8,653	0,903	0,917	0,106
9	7	8,264	0,917	1,125	7,736	0,894	0,849	0,110
10	8	9,113	0,849	1,103	6,887	0,890	0,688	0,100
11	9	9,801	0,688	1,075	6,199	0,900	0,724	0,117
12	10	10,525	0,724	1,074	5,475	0,883	0,564	0,103
13	11	11,089	0,564	1,054	4,911	0,897	0,507	0,103
14	12	11,596	0,507	1,046	4,404	0,897	0,456	0,104
15	13	12,052	0,456	1,039	3,948	0,896	0,288	0,073
16	14	12,34	0,288	1,024	3,66	0,927	0,366	0,100
17	15	12,706	0,366	1,030	3,294	0,900	0,394	0,120
18	16	13,1	0,394	1,031	2,9	0,880	0,165	0,057
19	17	13,265	0,165	1,013	2,735	0,943	0,265	0,097
20	18	13,53	0,265	1,020	2,47	0,903	0,239	0,097
21	19	13,769	0,239	1,018	2,231	0,903	0,215	0,096
22	20	13,984	0,215	1,016	2,016	0,904		

La question B.1. peut être directement résolue par utilisation du tableur et de l'affichage par l'outil numérique de l'expression de la fonction exponentielle définissant la courbe de tendance.



B.2. fait intervenir la dérivée de la fonction exponentielle et B.3. reprend des éléments d'algorithmie au programme de 1ère.

Eléments de programme plus spécifiques à l'enseignement optionnel de mathématiques complémentaires.
La question A.4. met en jeu deux éléments plus spécifiques au programme de l'enseignement optionnel de mathématiques complémentaires :

- notion de limite, et en particulier limite des suites géométriques ;
- suites arithmético-géométriques.

Les questions A.4.b. et A.4.d. ne figurent pas dans le document ressource et ont été ajouté pour aborder la notion de limite, propre à la classe de terminale.

La construction d'un algorithme de recherche de seuil, question A.4.e., appartient tout à la fois aux programmes de spécialité de première et de terminale option mathématiques complémentaires.

Les manipulations d'écritures littérales dans la première partie de la question A.4. peuvent faire l'objet de difficultés pour les élèves. La donnée ou non des formules, le guidage plus ou moins fort peuvent être des objets de différenciation, comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant.

Eléments de différenciation.
Nous mettrons en évidence trois points pouvant relever d'une différenciation plus ou moins importante.

1. Manipulation d'écritures littérales, question A.4.a.
L'obtention de la formule de départ découle des constats fait en A.3. : $u_{n+1} - u_n = 0{,}1(16-u_n)$.
Il s'agit d'une réécriture avec de nouvelles notations de la formule établie avec $q(n)$.
La formule $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 1{,}6$ est obtenue à partir de la précédente sans trop de difficulté.
Elle pourrait à ce titre faire l'objet d'une première question :
« a. Montrer que l'on a pour tout entier n : $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 1{,}6$ »
L'établissement de ces deux formules correspondrait pour l'élève à un degré de maîtrise insuffisant ou fragile.
La question A.4.a. est l'occasion de travailler une procédure et une technicité dont ne disposerons pas tous les élèves entrant en première et qui est propre à l'étude des suites arithmético-géométriques.

Cette technique pourra faire l'objet d'un travail spécifique s'appuyant sur des questions flash et des exercices d'application, qui expliciteront clairement la procédure.

$v_{n+1} = 16 - u_{n+1}$ expression de v_{n+1}
$v_{n+1} = 16 - (0{,}9u_n + 16)$ utilisation de la relation de récurrence pour (u_n)
$v_{n+1} = 14{,}4 - 0{,}9u_n = 0{,}9(16 - u_n)$ mise en évidence du facteur faisant apparaître v_n.

Dans le cadre de l'activité plusieurs pistes peuvent être envisagées :

- le traitement, pour rappel et en amont de l'activité (début de séance), par une question flash de cette procédure ;
- le renvoi au moment de l'activité à un exemple « modèle » du cours ;
- un guidage sous une forme ou une autre au moment de l'activité elle-même.

Exemple : « Jeu des pourquoi ? »

« Pourquoi peut-on écrire $v_{n+1} = 16 - u_{n+1}$?
Pourquoi peut-on écrire $v_{n+1} = 16 - (0{,}9u_n + 16)$?
Pourquoi peut-on écrire $v_{n+1} = 14{,}4 - 0{,}9u_n$?
Pourquoi peut-on écrire $v_{n+1} = 0{,}9(16 - u_n)$? »

L'objectif étant qu'au fur et à mesure de l'année l'élève se dégage de ces aides pour, en autonomie, arriver à un degré de maîtrise satisfaisant en matière de gestion des écritures littérales.

2. Dialogue du discret et du continu.

La question A.3. se veut, de façon implicite une référence à l'introduction en spécialité de première de l'exponentielle comme fonction solution d'une équation différentielle.
A ce titre elle peut être utilisée par l'enseignant pour favoriser le dialogue entre discret et continu et revenir sur cette partie du programme de première.

L'étude des données du tableau de la question A.3. doit aboutir à une conjecture admise :
« la vitesse moyenne d'absorption [...] est proportionnelle à l'écart entre 16 et la quantité d'analgésique »
La vitesse moyenne d'absorption : $q(n+1) - q(n) = \frac{q(n+1)-q(n)}{1}$ (attention dénominateur implicite) est proportionnelle à $16 - q(n)$.

Le passage au continu (voir document ressource, pages 14 et 15) conduit à établir :

$$\frac{q(x+h) - q(x)}{h} = k(16 - q(x))$$

Et par passage à la limite, f vérifie l'équation différentielle : $f'(t) = a(16 - f(t))$

Capacités attendues

- Résoudre une équation différentielle *y'* = *a y*. Pour une équation différentielle *y'* = *a y* + *b* : déterminer une solution particulière constante ; utiliser cette solution pour déterminer la solution générale.

L'activité peut donc être l'opportunité d'aborder tôt dans l'année, et sur une ou deux séances complémentaires, la notion d'équation différentielle :

- soit en se contentant de l'équation différentielle y' = ay (fonction g de l'activité),
- soit en abordant directement l'équation différentielle y'=ay+b (fonction f de l'activité),

conformément au programme.

Il ne s'agit pas d'attendre des élèves une acquisition des notions et techniques en jeu mais de leur en proposer une première approche, qui pourra s'appuyer sur des outils de raisonnement différenciés du point de vue des registres mis en œuvre (graphique, numérique, algébrique) mais aussi des exigences attendues (vérification de solutions données, application de procédures guidées, recherche plus autonome de solutions).

3. Algorithme et programmation.

Les questions A.4.e. et B.3. abordent l'algorithmie soit :

- par construction d'un programme,
- soit par compréhension et interprétation d'un programme donné.

Comme dit dans le programme : *« En algorithmique et programmation, le programme de mathématiques complémentaires reprend les programmes des classes de seconde et de première sans introduire de notion nouvelle, afin de consolider le travail des classes précédentes. »*

Ce travail peut bien sûr donner lieu à une différenciation :

- conception et écriture intégrale du programme par les élèves,
- compléments apportés à un programme partiellement fourni,
- compréhension et interprétation d'un programme entièrement rédigé en langage naturel ou de programmation.

A noter que si, de la partie A à la partie B, le passage du discret au continu est interrogé, l'utilisation de l'algorithmie, comme souvent, par discrétisation des variables, pose le problème réciproque : du continu au discret. Ce problème, très lié à la construction du nombre chez l'élève, doit faire l'objet d'un enseignement explicite et ne pas être caché.